ゴールドスタイン

新版

古典力学(上)

瀬川富士
矢野　忠 共訳
江沢康生

物理学叢書
11・a

吉岡書店

新版 古典力学

(上)

ゴールドスタイン著
瀬 川 富 士
矢 野 　 忠訳
江 沢 康 生

物 理 学 叢 書
11a

吉 岡 書 店

CLASSICAL MECHANICS

SECOND EDITION

Herbert Goldstein
Columbia University

私の恩師であり
かつ友人でもある
ルイスJ.クライン先生
の想い出に

This volume is a Japanese translation of CLASSICAL MECHANICS, Second Edition, by Herbert Goldstein published and sold throughout the world by permission of Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Massachusetts, U. S. A., the owner of all rights to publish and sell the same.

Copyright © 1980, 1950 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Philippines copyright 1980 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher. Printed in the United States of America. Published simultaneously in Canada. Library of Congress Catalog Card No. 79-23456.

目　次
（上　巻）

第6章　微小振動

第7章　古典力学における特殊相対性理論

付　録

≪下巻の主要内容≫

第2版への序文

“古典力学”の初版を出版して以来，ほぼ30年になる．その第2版に対する期待は，2つのほぼ相矛盾する反応を引き起こしてきた．一方では，“古典的”という形容詞は，その分野が完全で，閉じており，また物理学の研究の主流から遠くはずれたものであることを意味するように思われている．更に，初版はそれが出版されて以来，ずっと教科書として使用され，賛辞を受けてきた．それなのになぜ第2版を出す必要があるのだろうか？という意見がある．これと反対の，第2の反応は，第2版を出すことは遅きに失するというものである．（かなりの分量にのぼる）題材の変更よりも更に重要なことは，科学や技術の他の分野との関連において，古典力学に対する態度の変革があったということである．初版は，それが出版された時には，物理学を教える古い方法と決別しようとする運動の一環であった．しかし，1950年においては，大胆な新しい企てであったものも，今日では普通のことになっており，現在の世代に対してはいさゝか古臭い，古風な雰囲気を示している．古典力学の叙述には，根本的な変更がなされなければならない．

この第2版を準備するに当っては，これら2つの態度の中間のコースをとることを試みた．私は，可能な限り（私の認めた）初版の長所を残そうと努めたが，一方，教育課程における位置づけと，その他の分野への応用に鑑みて，題材それ自身の発展をいくらか考慮に入れた．このことから浮び上ってくることは，初版の徹底的な改訂ということである．ほとんど，どのページも変更なしには済まなかった．その変更には，いろいろの種類のものがある：

著者の発見した（あるものは実にひどい）誤り，あるいは著者に対して指摘された誤りは，もちろん訂正されている．改訂版の中に，余りにも多くの新しい誤りが入っていないことを望んでいる。

微小振動に関する章は，初版における最後から2番目の位置から動かして，

この版では剛体に関する第5章のすぐ後におくことにした．この位置は，力学の課程が現在実施されている通常のやり方に対して，より適当であるように思われる．そのために，ハミルトニアンによる定式化に関連したいくつかの題材は，この章から取り除かれて，後の(この版の)第8章に挿入されることになった．

摂動論に関する新しい1章が付け加えられている(第11章)．また連続的な系と場に関する最後の章は，初版の序文で暗黙のうちに約束しておいたように，大幅に膨張させた．

この書物全体を通じて，新しい節が付加されている．これらは閉じた軌道を生ずる，中心力ポテンシャルに対する第3章のBertrandの定理から，第12章の最後の節にあるNoetherの定理にまでわたっている．これらの節の大部分は，初版にない全く新しい題材を含んでいる．

いくつかの節で，例えば第4章のEulerの定理の証明におけるように，議論や説明は，より簡単で理解し易いと思われるものに置き換えられた．時には，初版で述べられた推論の筋道が，その問題を異なった立場から見ることによって補足された．その最も重要な例は，正準変換へのシンプレクティックな方法の導入である．これは，古い母関数の技法に並行するものである．

Eulerの角に対する元の規約はそのまま保たれてはいるが，量子力学で普通用いられる規約を含む別の規約にも言及されており，詳細な公式は付録中に与えられている．

初版に基づく，力学の課程の長い教授経験の結果の1つとして，各章末の問題の量を2.5倍以上に増加させた．更に参考書の紹介も，同じようにふくらんでいる．これは初版の出版後に，多くの価値ある教科書や単行本が現われたことを反映している．米国における大学院教育では，現在外国語が無視されているということを考えに入れて── しかし著者はこのことに賛成しているわけではないが── 英語以外の外国語の参考書を挙げることは最小限にとどめた．

この版に残されているトピックスや，付け加えられた題材の選択には，ある程度著者の個人的見解や関心が反映されている．読者は，いくらか違った

選択の方が好ましいと思われるかも知れない．おのおののトピックスについて，それを選んだ動機について論ずることは，あまりにも場所をとりすぎるし（またあまりにも退屈な）ことになるかも知れないが，著者がどれをとるかということを決める時に従ったいくつかの一般的原理については言及しておくべきであろう．用いられる数学的技法の選択の問題は，１つの厄介な問題である．初版は，学生にとっては余り親しみはないかも知れないが，広い有用性をもつ数学的な手法を導入するための１つの媒体として役立つようなものになることを試みた．この第２版では，この態度には一層注意を払った．学生が，行列の演算についての十分な予備知識をもって，力学を学び始めるようになっているであろうということは，30年前よりも現在でははるかにあり得ることである．それにもかかわらず，第４章の行列の性質に関する節は，そのまゝ残し，内容を増加させさえした．これは，必要な公式や手法を参照する便宜のためである．行列の演算に精通している人は，そうしたいなら，単にその節をとばせばよいのである．他方，より新しい数学的な手法という点では，ごく僅かのことが導入されただけである．群論の初等的事項は，この書物全体の中に，ばらまかれて言及されている．非Euclid空間におけるテンソルの演算は，第6,7章で簡単な注意が与えられている．他の点では，この版の数学的な程度は，初版のそれとほぼ同じである．それでも，この書物の物理的内容に対しては，十分過ぎるくらいである．物理学の他の分野で必要となる数学を履修するためにはカリキュラムの中で，別の手段が講じられるであろう．特に言っておきたいことは，理論物理学の中にでてくる“新しい数学”は故意に排除されているということである．多様体，あるいは微分同相写像，接ファイバーバンドル，あるいは不変トーラスについては何も触れなかった．大域解析学および微分位相幾何学という強力な道具が有用であるか，恐らくは本質的であるような，古典力学の高度に専門化されたある領域は確かに存在している．しかしながら，著者には，それらがこの第２版で追究しているレベルにおける古典力学の物理の理解に役立つかどうかということは明らかでない．これらの数学的概念や応用を導入することは，この書物をはち切れる程までに膨張させ，そして多分古典力学の物理をおおい隠すことに

しか役立たないであろう．理論物理学は，現在の傾向とは反対に，単なる数学ではない．

このような態度に従って，複素Minkowski空間は，数学を簡単にするために，特殊相対論の議論の大部分において残されている．この決定に対する基本的考え方は（それは現在のやり方に反しているように思われるが）383ページから384ページの間に詳細に述べられている．

今日，古典力学は閉じた主題であるということからは程遠い，ということは確かである．過去30年間に，古典力学の発展の新しい開花が見られた．それらは，新しい問題への取り組みや，古典力学の手法の，物理学および化学への，広範囲にわたる到達距離をもつ応用である．これらすべての発展の議論を，この書物に含めることは明らかに不可能である．その理由はいろいろある．紙面の制限ということは明らかに重要である．また，現在の研究の通俗的・一般的流行は，しばしば束の間のものであり，短かい寿命しか持っていないことがある．そしてまた，固体物理学あるいは物理化学のような，他の分野についての余りにも広範囲な予備知識を必要とする応用もいくつかある．ここでなされた選択は，ある個人的な妥協の産物である．簡単に記述でき，また新しい洞察を与えるような応用は，いくらか詳しく述べられている．その他のものは簡単に言及するにとどめたが，好奇心を喚起された学生が，それを追究するのに十分な参考書は挙げてある．いくつかの例では，ある分野における研究の現段階を，数学を使わないで，ほとんど全く言葉だけで記述することを試みた．これは，学生がさらに研究を進める上で，総合的な視野を与えるためである．省いた分野のうち特に挙げておく価値のあるものが1つある．── それは非線形振動とそれに関連した安定性の問題である．この分野が重要であることに疑いはないが，その問題を適切に取り扱うためには，それ自身1冊の書物に値すると思われる．

すべてのこのような制限や注意深い選択にもかかわらず，多分この書物は単一のコースで使用されるには，余りにも大きくなり過ぎているであろう．多くの節は，それらを省いても，後の理論展開には影響を与えないように書かれており，そのように印がつけてある．しかしながら，この書物を通じて

特別な“やり方”の印をつける必要は殆どないように著者には感じられた．それは，個々の教師は彼等自身の持っている特別な必要性を知っており，彼等の行う授業の中で，どれを取り上げ，どれを選ぶべきかを感じ取ることを，十分身につけているであろうからである．

私は，過去30年間にわたって，私の古典力学の教育に寄与して下さった多くの人達に感謝する．私の同僚Frank L. DiMaggio, Richard W. Longmanの各教授，およびPeter W. Likins学部長には多くの有益なコメントや議論をしていただいた．さらに，初版における重大な誤りを，特に穏やかで上品な態度で正して下さったことに対して，Sir Edward Bullard氏に感謝する．Yale大学のBoris Garfinkel教授は，いくつかの章を非常に丁寧に読んで論評していただき，また全力をつくして，私に天体力学の神秘への手引きをして下さった．私はまた，長年にわたって，多くの友人や見知らぬ人から，価値ある訂正や示唆を受取ったことに感謝している．その多くの人々の中でも特にEric Ericsen博士（Oslo大学），K. Kalikstein博士，J. Neuberger博士，A. Radkowski博士，およびW.S. Pajes氏の名前を挙げておきたい．これらの寄与は，確かにこの書物をより豊富にした．しかし，勿論誤りや誤解に対する責任は私だけにある．さらに過去30年間に“*American Journal of Physics*”の中に現われた，古典力学に関する論文の著者達に，まとめて感謝の気持をつけ加えておきたい．私は，これらの論文の各頁を熟読して，多くの収獲を得たものであった．

Addison-Wesleyのスタッフには常時助けていただき，また勇気づけられた．私は特に，Laura R. Finney夫人に対しては，決して終ることのないように思えたにちがいない過程に対する忍耐に対して，またMarion Howe夫人に対しては，満足できるような印刷物を作成するために奮闘して下さった，親切な，しかも粘り強い協力作業に対してとくに感謝したい．

私の父Harry Goldsteinには，彼の一生続いた強い愛情と導きによって，言葉にはつくせない程助けて貰った．父の霊に平和あれ！　私はここで，少なくとも彼の生存中には許されなかったであろうことをしておきたい.— それは初版に対する鋭い批判という援助と，注意深い編集に対して深く感謝する

ことである．私は彼の，透徹した簡潔な書き方をすべきだという意見のいくらかを，この第2版でも反映させることができたことを望むだけである．

私はこの書物を，この地球上で何よりも私の大切と思う人達，そしてまた私の人生に意味を与えてくれた人達——妻Channaと，子供達Penina Perl, Aaron MeirおよびShoshanna——に捧げたいと思う．

さらにとりわけ，私の心からの感謝の念を表わすために，Daniel書の第2章23節の次の言葉を記しておきたい．

> “わが先祖たちの神よ，あなたは私に知恵と力とを賜い，今われらがあなたに請い求めたところのものを，わたしに示し，主の求めたことをわれわれに示されたので，わたしはあなたに感謝し，あなたを賛美します.”

Kew Gardens Hills, New York
January 1980

HERBERT GOLDSTEIN

第１版への序文

古典力学の上級コースの課目は，長い間大学院の物理学教科課程の由緒ある一部分となっている．しかしながら，このような課目の現在での機能は一応問題にしてよいかも知れない．それは，このコースが大学院の学生に対して何ら新しい概念を与えることもなく，また直接かれらを現代物理学の研究へ導き入れることもないからである．さらにまたそのようなコースは，かれらが研究室で出会う実際的な力学の問題を解く場合にこれという役にも立たないためである．

このような非難にもかかわらず，物理学者の教育において古典力学は欠くことのできない部分として残っている．それは学生に近代物理学の研究に入る準備をさせる上で二重の役割をもっている．第１に，古典力学はその高級な種々の定式化において，近代物理学のいろいろな分野へのスプリングボードとして役立つ．すなわち作用変数と角変数の方法は前期量子力学のために必要であり，Hamilton-Jacobi の方程式および最小作用の原理は波動力学へ移る準備を与える．また，Poisson の括孤式および正準変換は，新しい量子力学の定式化において極めて有力な手段をあたえる．第２に，古典力学は学生に対してまだ古典力学の親しみ深い概念を用いて勉強しているうちに，量子力学において必要な多くの数学的な手段を修得する機会を与える．

もちろん，このような目的から考えると，約50年前にその大部分が固定されてしまった伝統的な古典力学の取り扱いはもはや適当なものではない．この本は，このような新しい要求を満足するように古典力学を解説しようとする１つの試みである．近代物理学にとって重要な定式化はこれを力説し，普通は量子力学と結びつけられるような数学的な手段も，それを用いることによってより美しくより簡潔な結果が得られる場合にはいつでも導入した．たとえば，中心力の場における運動の議論は，散乱の運動学や，散乱の問題に対

する古典的な解をも含むように拡張しておいた．正準変換，Poisson の括弧式，Hamilton-Jacobi の理論，および作用変数-角変数のために相当のスペースが当てられた．連続的な系および場の変分原理による定式化への序論も与えてある．新しい数学的な手段の応用を示す例としては，剛体の回転を行列の変換の立場から取り扱ってある．このようにすると，よく知られた剛体の運動に関する Euler の定理は，1つの直交行列に対する固有値問題という形で示すことができる．このような取り扱いの1つの結果として，慣性テンソル，Minkowski 空間における Lorentz 変換，および微小振動の共鳴振動数などのような別々の題目に対して統一的な数学的取り扱いが可能になる．またこのような手法によって，近代の量子力学において非常に重要な鏡映の操作および擬テンソル量という難しい概念を初期の段階で取り入れることができるようになる．行列の方法のもう1つの利点は Cayley-Klein のパラメータに関連して“スピノール”(spinor)を導入することができるということである．

その他いくつかの新しい試みもためらうことなく取り入れた．特殊相対性理論は，一般相対性理論をも含む高度に専門化されたコースの一部分として以外に，古典力学に結びつけて議論されることが余りにも少ない．しかしながら，近代物理学における特殊相対性理論の重要性は，学生が教育の初期の段階でその理論に接すべきであることを要求している．それゆえ，この書物では第Ⅵ章がこの主題に当てられている．もう1つの新しい試みは，速度に関係する力を含めたことである．歴史的には，古典力学は重力のように位置だけに関係する静的な力に重点をおいて発展した．他方，速度に関係する電磁力は，近代物理学において絶えず出会うものである．学生ができるだけ早くそのような力を取り扱うことができるように，速度に関係するポテンシャルを初めから力学の構造の中に組み入れ，この書物全体を通じて首尾一貫して論じておいた．

さらに他の新しい試みは，第Ⅺ章において連続的な系および場の力学を取り扱ったことであるが，この題材を選んだことについてはいくらか註釈を加えておく方がよいのであろう．厳密に解釈すれば，この題目の中には弾性論，流体力学および音響学のすべてが含まれるであろうが，これらの題材はこの

本に定められた範囲の外にあることであり，またそれらの題目についてはたいてい適当な書物が書かれている．それに対して，連続的な系の変分原理による定式化に対する古典的な基礎づけについては，それが素粒子の場の理論においてますます重要になってきているにもかかわらず，古典力学に関連して説明されているものは見当らない．場の理論は，量子化を導入することが必要となるよりも前に，かなり先の複雑なところまで進めることができる．たとえば，ストレス-エネルギー-テンソル，微視的な連続の方程式，運動量空間表示などはまったく古典物理学の領域の中で完全に論ずることができる．しかしながら，これらの問題を適切に議論することは，学生に対して当然期待できるより以上の技巧を要求するように感じられた．それゆえ少なくともこの版では，第XI章は場のラグランジアン形式およびハミルトニアン形式の基本的な記述だけに限定することに決めた．

この教科書があてはまるコースでは，原則的には力学の中間的なコース程度の予備知識を予想している．適当な予備知識をもつに至っていない大学院の学生（非常にしばしばあることだが），および中間的な段階を飛ばしたいという野心をもつ専門課程の学生の両方のために，本書をこれだけでまとまったものにしようと努力した．それゆえ第I章と第III章の多くの部分は通常基礎コースに含まれる題材のために当てられている．

2，3の例外を除いては，学生に対して微分積分学およびベクトル解析に関する普通の大学程度のコースより以上の数学的な予備知識は要求していない．それゆえ，もっと複雑な数学的手段が必要になったときには，それを展開するためにかなりのスペースが与えられている．電磁力に関する数節を理解するためには，Maxwellの方程式と，それから導かれる簡単な結果に対する基本的な知識が必要である．大学院にはいってくる学生の多くは，少なくとも1学期間は近代物理学の講義を受けているから，しばしばこの事情を利用して古典的な展開とその量子力学へのつながりの関係を簡単に示しておいた．

力学に関する文献の中には，沢山の演習問題が載っており，誰にでも容易に利用できるから，そのような問題を広く集めて転載することは大して重要でないように思われた．それゆえ，各章の終りにつけてある演習問題は，主

としてある特別な点を説明したり，あるいは変形された定理を証明したりして，本文の延長として役に立つようなものだけに限り，衒学的な，博物館向きのものはわざと避けた．

記号の問題はいつもながら困る問題である．実行不可能でもなく，またうるさくもなく，首尾一貫していてあいまいさのない記号の体系を作り上げることは不可能である．慣用に従って，ベクトルは太いローマ字立体で表わした．さらに，任意の階数の行列で表わされる量，およびベクトル以外のテンソルは，例えば**A**のように太いサンセリフ体で示した．この本の終りには記号の索引がつけてあり，重要な記号の意味がそれぞれ初めて出てくるページと共に示してある．唯一度出てくるだけで重要でない記号は含まれていない．

各章の終りには，この書物で論じた題材をさらに詳細にしらべ，またこの書物では触れなかった点についての取り扱いを知るための，参考書を挙げておいた．これらの参考書に付けた評言はもちろん純粋に個人的見解であるが，しかし力学に関する文献について困惑する学生のためにいくらかの道案内を与えることは必要であるように感じられた．これらの参考書もまた，さらに他の多くのものといっしょに巻末に表にして掲げてある．この表は決して完全であることを意図したものでなく，古い本の多くは故意に省いてある．この表の中には大体においてこの本を書くときに利用した参考書が含まれているから，この表はまた，著者がこれらの参考書に負うところがあったことに対する感謝の意を表わすよすがともなるにちがいない．

本書は著者がHarvard大学で行った古典力学の講義から生まれたものである．当時物理学教室の主任であったJ.H.Van Vleck教授が著者に対して与えられた公的および私的な多くの激励に対して深く感謝の意を表わしたい．またJ. Schwinger教授およびその他の同僚からは多くの貴重な示唆を与えていただいた．さらに，著者の講義に対して好意的な反応と積極的な関心を示すことによって，この仕事をつづけてゆく上に絶えず刺戟を与えてくれた学生諸君に対しても深い感謝の念を記しておきたいと思う．

Cambridge, Mass.
March 1950

HERBERT GOLDSTEIN

訳者まえがき

ゴールドスタイン著“古典力学”の初版の翻訳を出版してから，早くも 24 年が過ぎた．ここに訳出したのは同書第 2 版，H. Goldstein，“*Classical Mechanics*” 2nd edition (Addison-Wesley ; 1980) である．書名は同じであるが，内容は相当大幅に改訂されている．内容の変更については，著者の第 2 版への序文に詳しく述べられているので，ここで繰り返す必要はないであろう．そこで述べられている通り，初版にくらべて変更されなかったページはほとんどないと言ってよい．細心の注意を払って，数学的証明の改良や，新しい題材の添加がなされている．この点についての著者の努力に対しては深く敬意を表するものである．ただ，余りにも完璧を期したために，更に新たな題材も加わり，初学者にとって多少なじみにくいと思われるところが見受けられるかも知れないが，そのように感じられる読者は，まず，第 1, 2, 4, 5, 8 章を読んで古典力学のあらすじをつかんだ後に，興味に応じて他の各章にはいって行かれることをおすすめする．訳者としては，この書物が，古典力学の体系的な記述の最良のものの 1 つであることにはいさゝかの疑念をもつものではない．

第 2 版は初版にくらべてかなり大部のものになったため，訳書を上，下 2 巻に分けた．第 1 章から第 7 章は上巻に収められ，第 8 章から第 12 章までは下巻に収められる．翻訳は十分注意して行ったつもりであるが，もちろん多くの誤りも残っているであろう．特に訳語に関しては，定着していないものも相当数用いたので，不適切なものがあれば，読者の御叱正をお願いする次第である．初版と同じ部分については初版の訳をほぼそのまま用いた．原文の明らかな誤りおよびミスプリントは訳者の気付いた限り，特に断りなしに訂正しておいた．*，† 等は原注を表わし 1), 2) 等は訳注を表わしている．

この 24 年の間に初版の共訳者野間進先生は逝去された．第 2 版の翻訳は，

愛媛大学工学部教授の矢野忠氏と，教養部助教授の江沢康生氏に加わって頂いて３人で分担した．すべての原稿は３人で目を通し，疑問点については集って討論したが，最終的な原稿の整理および文体の統一は私が担当した．

翻訳のたびに思うことであるが，この仕事は大変むずかしい．著者の真意を正しく伝えているかどうかという不安がつきまとう．朝永先生のお言葉に“翻訳はエントロピーを増加させる”ということがあったと聞いているが，どうかこの翻訳がエントロピーの増加を最小限に止めていることを願ってやまない．

なお，原著の明らかなミスプリント等について本書別巻，演習書の著者瀬藤憲昭，吉田俊博両氏から多くのご指摘を得たことを厚く御礼申しあげる．

吉岡書店から本書の翻訳を勧められたのは３年前のことであった．以来訳者の怠慢と公務多忙のため，今日までおくれ，吉岡書店主吉岡清氏および編集部の上川正司氏に大変御迷惑をおかけしたことに対して深くお詫びする次第である．なお，原稿の準備に当って事務的なことでいろいろお世話になった教養部物理学教室事務主任忽那茂子氏に謝意を表する．

1983年6月

愛媛大学教養部物理教室

瀬　川　富　士

第1章　基本原理の概観

p.1 物体の運動は，物理学の開拓者たちによって進められた初期の研究の中の，ある部分の主題となったものである．かれらの努力によって解析力学（analytical mechanics,あるいはanalytical dynamics），または単に力学（mechanics）として知られている広大な物理学の分野が開かれた．今世紀にはいってからは，物理学のこの部門を，新しい物理学の理論，特に量子力学（quantum mechanics）と区別するために，“古典力学”（classical mechanics）という言葉が広く用いられるようになった．われわれは，この名称を，その中に特殊相対性理論（special theory of relativity）に基づく力学の形式をも含むものと解釈して，慣用に従って用いることにする．この古典力学の骨組を示し，純粋物理学において，現在興味のあるいくつかの問題への応用のあらましを述べるのが，この書物の目的である．

力学をどのように記述する場合でも，その基礎になるものは，空間（space），時間（time），同時性（simultaneity），質量（mass），および力（force）などのような，いくつかの基本的物理概念である．しかし，特殊相対性理論を論ずる際には，同時性および時間と長さの目盛などの概念を，簡単に吟味するが，大抵の場合は，これらの概念についての批判的分析は行わない．むしろこれらの言葉は，定義されてはいないが，読者にはその意味がよくわかっているものと仮定しよう．

1−1　質点の力学

rをある与えられた原点からの動径ベクトル（radius vector）とし，**v**をそ

の速度ベクトルとすると，

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{1-1}$$

である.

質点の**線運動量**（*linear momentum*）$\mathbf{p}$ は，質点の質量とその速度の積として，

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{1-2}$$

で定義される．外部の物体，あるいは場との相互作用の結果，質点はいろいろな形の ── 例えば，重力的あるいは電磁的 ── 力を受けるであろう．質点に作用するこれらの力のベクトル和は合力（total force）$\mathbf{F}$ である．質点の力学は，
p.2
Newtonの運動の第2法則（*Newton's Second Law of Motion*）の中に含まれている．この法則は，質点の運動が，微分方程式，

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \tag{1-3}$$

あるいは，

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \tag{1-4}$$

で記述されるような座標系が存在することを述べるものである．大部分の場合には，質点の質量は一定であって，方程式（1－3）は次のようになる．

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \tag{1-5}$$

ここで $\mathbf{a}$ は質点の加速度ベクトル（acceleration vector）であって，

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{1-6}$$

で定義される．このように，運動方程式は，$\mathbf{F}$ が高階導関数に依存しないと仮定すれば，2階の微分方程式である．

方程式（1－3）が成立するような座標系は，**慣性系**（*inertial system*）あるいはGalilei系（*Galilean system*）と呼ばれる．古典力学においてさえも，慣性系という概念は，ある理想化によるものである．しかしながら，実際的に

は，要求される望ましい性質にいくらでも近い性質をもつ座標系を構成することは，通常実行可能である．多くの目的のためには，地球に固定された座標系（“実験室系”(laboratory system)）は，慣性系に対する十分良い近似である．しかし一方，ある天文学的目的のためには，最も遠く離れた銀河に結びつけて慣性系を構成することが必要になることもあるであろう．

力学の重要な結論の多くは，保存則(conservation theorems)の形に表現することができる．これは，どのような条件の下で，いろいろな物理量が時間的に一定であるかを示すものである．(1−3)式は，直接にこれら保存則の最初のものを与える．すなわち，

質点の線運動量に対する保存則：もし合力 $\mathbf{F}$ が零であれば，$\dot{\mathbf{p}}=0$ となり，線運動量 $\mathbf{p}$ が保存される．

点 O のまわりの**角運動量**(angular momentum)を $\mathbf{L}$ で表わすと，$\mathbf{L}$ は，

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}\ , \qquad (1-7)$$

で定義される．ここで $\mathbf{r}$ は O から質点に至る動径ベクトルである．この式では因数の順序が重要であることに注意しよう．O のまわりの**力のモーメント**(*moment of force*)，すなわち**トルク**(*torque*)を，

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}\ , \qquad (1-8)$$

p.3
で定義する．$\mathbf{r}$ と方程式(1−4)とのベクトル積を作ることによって，$\mathbf{N}$ に対して(1−3)に似た方程式が得られる．すなわち，

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})\,. \qquad (1-9)$$

方程式(1−9)は，ベクトル恒等式，

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})=\mathbf{v}\times m\dot{\mathbf{v}}+\mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})\,, \qquad (1-10)$$

を用いて別の形に書くことができる．ここで，右辺の第1項は明らかに零になる．この恒等式によって，方程式(1−9)は次の形になる

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} . \qquad (1-11)$$

ここで，**N**も**L**もモーメントをとる点Oに関係することに注意しておこう．

方程式（1－3）の場合と同様に，トルク方程式（1－11）からも直接に1つの保存則が得られる．この場合には，

質点の角運動量に対する保存則：もし全トルク**N**が零であるならば $\dot{\mathbf{L}} = 0$となって角運動量が保存される．

次に，質点が点1から点2に移る間に，質点に作用する外力（external force）によってなされる仕事を考えよう．定義によって，この仕事は，

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} , \qquad (1-12)$$

で与えられる．質量が一定の場合には（今後とくにことわらない限り，同じように仮定する），（1－12）式の積分は次の形になる．

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}\, dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt}(v^2)\, dt .$$

したがって

$$W_{12} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) , \qquad (1-13)$$

である．スカラー量 $mv^2/2$は質点の運動エネルギー（kinetic energy）と呼ばれ，Tで表わされる．それゆえ，なされた仕事は運動エネルギーの変化に等しく，

$$W_{12} = T_2 - T_1 , \qquad (1-14)$$

である．

もし力の場が，点1と点2を結ぶ物理的に可能などんな道に対しても，仕事W_{12}が等しいようなものであるならば，そのとき，その力（およびその系）は
p.4
保存的である（*conservative*）といわれる．保存系のもう1つの別の記述の仕方は，次のようにして得られる．質点が点1から点2まで1つの可能な道に沿って運ばれ，他の道を通って点1に戻されると想像しよう．W_{12}が特別の道に

依存しないということは，そのような閉じた道を回ったときになされる仕事は零であることを意味する．すなわち，

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0, \qquad (1-15)$$

である．物理的には，摩擦力あるいは他の散逸力 (dissipation forces) が存在するならば，系は保存的ではありえないことは明らかである．なぜなら，摩擦力による $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ は常に負であって，積分は零になることはできないからである．

ベクトル解析の良く知られた定理* によって，W_{12} が質点のとる物理的道筋に無関係であるための必要十分条件は，$\mathbf{F}$ がある位置のスカラー関数の勾配 (gradient) に等しいことである．すなわち，

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}), \qquad (1-16)$$

である．ここに V は**ポテンシャル** (potential)，あるいは**位置エネルギー** (potential energy) と呼ばれる．V の存在は簡単な議論によって，直観的に推論できる．もし W_{12} が端の点 1 と 2 の間の積分路に無関係であるならば，W_{12} を端の点の位置のみに依存する，ある量の変化として表わすことができるはずである．この量は $-V$ と書いてもよい．そうすると，微小な道の長さに対して，次の関係式を得る．すなわち，

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -dV,$$

あるいは，

$$F_s = -\frac{\partial V}{\partial s},$$

である．これは (1−16) 式と等価である．(1−16) 式において，空間的に一定な量を V に加えても結果は変わらないことに注意しよう．したがって V の零準位 (zero level) は任意にとってよい．

保存系に対しては，力によってなされる仕事は，

$$W_{12} = V_1 - V_2, \qquad (1-17)$$

---

*) 例えば，W. Kaplan, *Advanced Calculus*, 2nd ed. (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1973). p. 311, p. 347 を見よ．

である．(1－17)式と(1－14)式を結びつけると，次の結果が得られる．

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad . \qquad (1-18)$$

これは，次の法則を記号で表わしたものである．

質点に対するエネルギー保存則：質点に作用する力が保存的であれば，質点の全エネルギー $T+V$ は保存される．

p.5 ある環境の下では，質点に加えられる力が，質点の位置と時間の両方に陽に依存する，1つのスカラー関数の勾配によって与えられることがある．しかしながら，そのときには，質点が ds だけ動くときに質点になされる仕事，

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial V}{\partial s}ds,$$

は，もはやその変位の間の $-V$ の全変化量に等しくはない．それは，質点が動くにつれて，V も時間に陽に依存して変化するからである．それゆえ，質点が点1から点2へ行くときになされる仕事は，もはやそれらの点の間の関数 V の差ではない．一方，全エネルギー $T+V$ はやはり定義できるであろうが，それは質点の運動の経過に伴って保存されない．

1－2　質点系の力学

前節の考え方を，多くの質点から成る系に一般化する場合には，系の外部からの原因によってこれらの質点に作用する**外力** (*external force*)と，例えばある質点 i に，系の内部にある他のすべての質点から及ぼされる**内力** (*internal force*)とを区別しなければならない．したがって，i 番目の質点に対する運動方程式 (Newtonの第2法則) は，

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i , \qquad (1-19)$$

と書くべきである．ここで，$\mathbf{F}_i^{(e)}$ は質点に作用する外力を表わし，$\mathbf{F}_{ji}$ は，j 番目の質点から i 番目の質点に及ぼされる内力である ($\mathbf{F}_{ii}$ はもちろん零である．$\mathbf{F}_{ij}$ は ($\mathbf{F}_i^{(e)}$ と同じように)，Newton の運動の第3法則の元の形に従うと仮定する．すなわち2個の質点が互いに及ぼし合う力は，大きさが等しく，

かつ向きが反対であるということである．この仮定は（すべての型の力に対して成立するものではない），**作用・反作用の弱法則**（*weak law of action and reaction*）と呼ばれることがある．

すべての質点について和をとると，（1−19）式は次の形になる．

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i\mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \mathbf{F}_{ji} . \qquad (1-20)$$

右辺の最初の和は，単に外力の合力$\mathbf{F}^{(e)}$であり，他方第2項は零になる．それは作用・反作用の法則によって，対にとった力 $\mathbf{F}_{ij}+\mathbf{F}_{ji}$ がそれぞれ零になるからである．左辺を変形するために，質量に比例した重みをつけた，質点の動径ベクトルの平均として，一つのベクトル$\mathbf{R}$を定義する．すなわち，

$$\mathbf{R} = \frac{\Sigma\, m_i\mathbf{r}_i}{\Sigma\, m_i} = \frac{\Sigma\, m_i\mathbf{r}_i}{M} \quad , \qquad (1-21)$$

である．ベクトル$\mathbf{R}$は，系の**質量中心**（*center of mass*），あるいはもっとゆるく重心（center of gravity）として知られている1つの点を定義する（図1−1参照）．この定義を用いると，（1−20）式は次のように変形される．

$$M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{F}^{(e)}. \qquad (1-22)$$

p.6
この式は次のことを表わしている．すなわち，質量中心はあたかも系の全質量が質量中心に集中して，その点に外力の合力が作用しているかのように運動する．純粋な内力は，もしそれらがNewtonの第3法則に従うならば，質量中心の運動には何の効果も及ぼさない．しばしば引用される例は爆発する砲弾である ── 破片全体の質量中心は（空気の抵抗を無視すれば），あたかもそれらがまだ一塊りになっているかのように運動する．同じ原理は，ジェット，およびロケット推進の場合にも含まれている．質量中心の運動が影響を受けないためには，高速度の排気ガスの放出は，本体の前方への運動によって相殺されなければならない．

（1−21）式によると，系の全線運動量，

$$\mathbf{P} = \Sigma\, m_i\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M\frac{d\mathbf{R}}{dt}, \qquad (1-23)$$

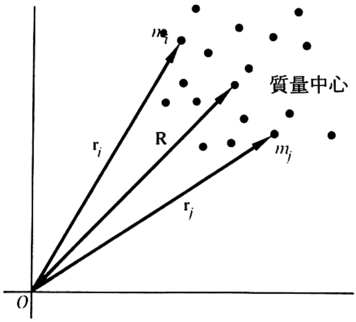


図 1－1
質点系の質量中心.

は質量中心の速度に，系の全質量をかけたものに等しい．したがって，質量中心の運動方程式（1－22）は，次のようにいい換えることができる．

質点系の線運動量に対する保存則：もし外力の合力が零であれば，全線運動量は保存される．

次に，ベクトル積 $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ をつくり，i について和をとると，系の全角運動量が得られる．（1－19）式にこの演算を行い，（1－10）の恒等式を用いると，次の結果が得られる．

$$\sum_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) = \sum_i \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}. \qquad (1-24)$$

この式の右辺の最後の項は，

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}, \qquad (1-25)$$

p.7
という形の項の和と考えることができる．ここで作用と反作用の大きさは等しく向きは反対であることを用いた．ところが，$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ は，j から i に向かうベクトル $\mathbf{r}_{ij}$ に等しい（図1－2参照）．それゆえ，（1－25）式の右辺は，

$$\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji},$$

と書くことができる．もし2質点間の内力が，大きさが等しく向きが反対であ

る上に，その方向が２つの質点を結ぶ直線に沿っているならば — これは**作用・反作用の強法則**（*strong law of action and reaction*）として知られている条件である — これらすべてのベクトル積は零になる．この仮定の下では，対についての和は零であって，方程式（1−24）は，

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(e)}, \tag{1-26}$$

の形になる．すなわち，全角運動量の時間に関する導関数は，与えられた点に関する外力のモーメントに等しい．（1−26）式に対応するのが次の保存則である．

全角運動量に対する保存則：もし外部から加えられるトルクが零であるならば，全角運動量は時間的に一定である．

（これは**ベクトル**法則であることを強調しておくことは意味のあることであろう．すなわち，$N_x^{(e)}$や$N_y^{(e)}$が零でないとしても，もし$N_z^{(e)}$が零ならばL_zは保存されるであろう．）

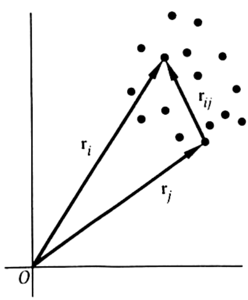


図 1−2
i 番目と j 番目の質点の間のベクトル $\mathbf{r}_{ij}$．

加えられる力がないときの，線運動量の保存則では，内力に対して作用・反作用の弱法則が成立していることが仮定されている，ことに注意しよう．加えられたトルクがないときの，系の全角運動量の保存則では，作用・反作用の強法則が成立することが要求される．すなわち内力はさらに**中心的**（*central*）で

なければならない．親しみ深い物理的な力の多くは，例えば重力のように，強法則を満足する．しかし，たとえ中心的ではないとしても，作用と反作用とが等しいような力を見出すことはできる（下を見よ）．運動する電荷を含む系では，Biot-Savartの法則によって予言された電荷の間の力は，実際，作用・反作用の強弱両法則を侵すであろう*．方程式（1－22）と（1－26），およびそれらに対応する保存則は，そのような場合には，少なくともここで与えた形では適用できない．そのときには，通常，保存されるような$\mathbf{P}$あるいは$\mathbf{L}$の一般化された形を見つけることが可能である．このように，運動する電荷の孤立系では，保存されるのは，力学的角運動量と場の電磁“角運動量”の和である．

p.8

（1－23）式は，系の全線運動量が，あたかも系の全質量が質量中心に集中して，その質量中心と一緒に運動しているのと同じであることを表わしている．角運動量に対する同じような法則は，もう少し複雑である．原点Oを基準にとると，系の全角運動量は，

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i ,$$

となる．$\mathbf{R}$をOから質量中心に至る動径ベクトルとし，$\mathbf{r}'_i$を質量中心からi番目の質点に向って引いた動径ベクトルとしよう．そうすると（図1－3参照），

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} , \qquad (1-27)$$

および

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v} ,$$

が得られる．ここで

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt},$$

はOに対する質量中心の速度である．また，

---

*) 2個の電荷が，電荷を結ぶ直線に垂直でない，平行な速度ベクトルをもって一様に運動しているならば，相互に及ぼす力は大きさは等しく向きは反対であるが，電荷を結ぶベクトルに平行にはならない．さらに，2個の電荷が（瞬間的に）“T型交叉”をするように，すなわち第1の電荷がそれに対して垂直に運動している第2の電荷に向って進んでいる場合を考えよう．そのときには第2の電荷は第1の電荷に対して零でない力を及ぼすが，第2の電荷はなんの反作用も受けることはない．

$$\mathbf{v}_i' = \frac{d\mathbf{r}_i'}{dt},$$

は，系の質量中心に対する i 番目の質点の速度である．(1—27)式を用いると，全角運動量は次の形になる．

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i'\right) \times \mathbf{v} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt}\sum_i m_i \mathbf{r}_i'.$$

この式の最後の２つの項は零になる．なぜなら，２つとも $\sum m_i \mathbf{r}_i'$ という因数を含んでいるが，この因数はまさに，質量中心自身を原点とする座標系における，質量中心の動径ベクトルを定義するものであり，したがって零ベクトルになるからである．残りの項を書き直すと，O に関する全角運動量は，

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i'. \qquad (1-28)$$

となる．(1—28)式を言葉でいえば，O に関する全角運動量は，全質量が質量中心に集中した場合に，系が O に関してもつ角運動量と，質量中心のまわりの角運動量との和である，ということになる．(1—28)式の形は，一般に $\mathbf{L}$ がベクトル $\mathbf{R}$ を通して原点 O に関係する，ということを強調している．質量中心が O に相対的に静止している場合に限って，角運動量は基準点に無関係になる．この場合には(1—28)式の最初の項は消えて，$\mathbf{L}$ はいつでも，質量中心に関してとった角運動量になってしまう．

最後にエネルギー方程式を考えよう．ただ１つの質点の場合と同じように，

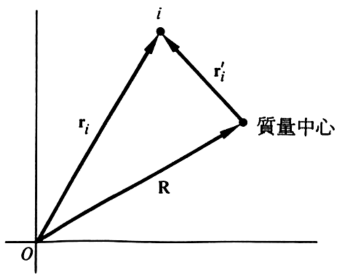


図 1—3
角運動量に対して，基準点を移動したときにでてくるベクトル．

系を最初の配置1から最後の配置2まで移す間に，すべての力によってなされる仕事を計算しよう．

$$W_{12}=\sum_i\int_1^2 \mathbf{F}_i\cdot d\mathbf{s}_i=\sum_i\int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)}\cdot d\mathbf{s}_i+\sum_{i\neq j}\int_1^2 \mathbf{F}_{ji}\cdot d\mathbf{s}_i . \qquad (1-29)$$

ここでも運動方程式を利用すると，この積分は，

$$\sum_i\int_1^2 \mathbf{F}_i\cdot d\mathbf{s}_i=\sum_i\int_1^2 m_i\dot{\mathbf{v}}_i\cdot\mathbf{v}_i\,dt=\sum_i\int_1^2 d(\tfrac{1}{2}m_iv_i^2),$$

となる．したがって，なされた仕事はやはり，最後と最初の運動エネルギーの差の形に書くことができる．すなわち，

$$W_{12}=T_2-T_1 .$$

ここで，Tは系の全運動エネルギーであって，

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_iv_i^2, \qquad (1-30)$$

である．(1－27)式によって与えられる，質量中心を用いる座標への変換を利用すれば，Tはまた，

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\mathbf{v}+\mathbf{v}_i')\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{v}_i')\\&=\frac{1}{2}\sum_i m_iv^2+\frac{1}{2}\sum_i m_iv_i'^2+\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\mathbf{r}_i'\right),\end{aligned}$$

p.10
と書くことができる．そして，角運動量の計算の場合にすでに行ったのと同じ理由によって，最後の項は消えるから，残りは，

$$T=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}\sum_i m_iv_i'^2, \qquad (1-31)$$

となる．このように，運動エネルギーもまた，角運動量と同じように，全質量が質量中心に集中していると考えたときに得られる運動エネルギーと，質量中心のまわりの系の運動エネルギーとの2つの部分から成り立っている．

さて(1－29)式の右辺について考えてみよう．外力がポテンシャルからその勾配として導かれるような特別な場合には，最初の項は次のように書くことができる．

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i = -\sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{s}_i = -\sum_i V_i \Big|_1^2 \quad .$$

ここで，デル演算子（del operator，ナブラ演算子（nabla operator）ともいう）の添字 i は，その導関数が $\mathbf{r}_i$ の成分に関するものであることを示す．もし内力もまた保存的であれば，i 番目と j 番目の質点が，互いに及ぼし合う力 $\mathbf{F}_{ij}$ と $\mathbf{F}_{ji}$ も，１つのポテンシャル関数 V_{ij} から導くことができる．作用・反作用の強法則を満たすためには，V_{ij} は２つの質点間の距離のみの関数，すなわち，

$$V_{ij} = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \qquad (1-32)$$

であればよい．そうすると，これら２つの力は自動的に，大きさが等しく向きが反対，すなわち，

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij} = +\nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ij} \quad , \qquad (1-33)$$

となり，また２つの質点を結ぶ直線の方向にあることになる．すなわち，

$$\nabla V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) f, \qquad (1-34)$$

である．ここで，f はあるスカラー関数である．もし V_{ij} が２つの質点に関係する，２個の質点の座標のほかに，さらに別のある**一対の**ベクトル，例えばそれらの速度，あるいは（近代物理学の領域にふみ込んで）それらの固有の“スピン”（spin）角運動量などの差の関数であるような場合には，その力は，やはり大きさは等しくて向きは反対になるであろうが，もはや必ずしも２つの質点を結ぶ直線の方向に沿っているとは限らないであろう．

力がすべて保存的であるときには，（1−29）式の第２項は，質点の対についての和の形に書き直すことができる．この場合，各対に対する項は次の形になる．

$$-\int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \nabla_j V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_j).$$

ベクトル差 $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ を $\mathbf{r}_{ij}$ と書き，$\mathbf{r}_{ij}$ についての勾配を ∇_{ij} で表わすと，

$$\nabla_i V_{ij} = \nabla_{ij} V_{ij} = -\nabla_j V_{ij} \quad ,$$

および，

$$d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j = d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j = d\mathbf{r}_{ij} \quad ,$$

p.11
である．したがって，対 ij に対する項は次の形に書ける．

$$-\int \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} .$$

そうすると，内力による全体の仕事は，

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij}\cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} V_{ij}\Big|_1^2 , \qquad (1-35)$$

となる．この（1－35）式に $\frac{1}{2}$ という因数が現われるのは，i と j の両方について和をとるときに，ある定まった一対を作る各質点が，2回ずつ勘定に入れられるからである．1回は i について和を取るときで，他の1回は j について和を取るときである．

これらの考察から明らかなように，もし外力と内力の両方がともにポテンシャルから導かれるならば，系の**全位置エネルギー**（*total potential energy*）V を，

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} V_{ij} , \qquad (1-36)$$

で定義することができて，系の全エネルギー $T+V$ が保存されることになる．このことは1個の質点に対する保存則（1－18）式に対応している．

（1－36）式の右辺の第2項は，系の内部位置エネルギー（internal potential energy）と呼ばれる．一般的には，この量は零でなければならないということはない．そして，もっと大切なことは，系が時間と共に変化するときに，それが変わるかもしれないということである．ただ，**剛体**（*rigid body*）として知られている特別の系に対してだけは，内部ポテンシャルがいつでも一定である．形式的には，剛体は質点間の距離 r_{ij} が固定されていて，時間的に変わることができない系であると定義することができる．そのような系では，ベクトル $d\mathbf{r}_{ij}$ は，対応するベクトル $\mathbf{r}_{ij}$ にいつも垂直であり，したがって $\mathbf{F}_{ij}$ に垂直になる．このために，剛体においては，内力は仕事をしない．したがって内部ポテンシャルは，常に一定でなければならない．全ポテンシャルには，いつでも付加定数だけの不定さがあるから，内部ポテンシャルが変わらないときには，系の運動を論ずる場合に，これを完全に無視することができる．

1−3　拘　　束

前節までに述べてきたところによると，力学におけるすべての問題は，一組の微分方程式（1−19），

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji}\,,$$

を解くことに帰着される，という印象を受けるかもしれない．われわれは単に，系を作っている質点に作用するさまざまの力を，この方程式に代入し，数学という機械のクランクをまわして答を引き出すだけでよい！ しかし純粋に物理的な立場からいっても，このような見解は，事態を余りにも簡単化しすぎている．たとえば，系の運動を制限する**拘束**（*constraints*）を考慮する必要があるかも知れない．われわれはすでに，拘束を含む系の１つの型に出会っている．それは剛体であって，これを作っている質点の運動に対する拘束は，距離 r_{ij} を不 p.12 変に保つようなものである．拘束された系の例をもっと挙げることは容易である．そろばんの玉は，これを通した心棒によって１次元の運動をするように拘束されている．容器に入れた気体の分子は，容器の壁によって，その内部だけを運動するように拘束される．中のつまった球の表面におかれた質点は，その拘束によって，球の表面またはその外部領域だけを運動するように制限される．

拘束は，いろいろの方法で分類できるが，ここでは次のような分類法を用いることにしよう．拘束の条件が，質点の座標（および場合によっては時間）の間の関係式として表わすことができ，

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots, t) = 0, \qquad (1-37)$$

の形に書ける場合には，その拘束は**ホロノミック**（*holonomic*）であるといわれる．ホロノミックな拘束の最も簡単な例は，おそらく剛体であろう．この場合の拘束は，

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0\,,$$

の形の方程式によって表わされる．質点が，１つの曲線または面に沿って運動するように拘束されている場合も，明らかにホロノミックな拘束の例である．

このときには曲線あるいは面を定義する方程式が拘束の方程式として働く.

上のような形に表わすことのできない拘束は,**非ホロノミック**(*nonholonomic*)であるといわれる.気体を入れた容器の壁は,非ホロノミックな拘束をつくる.球の表面上におかれた質点の例で見られる拘束も,非ホロノミックである.なぜなら,それは,不等式,

$$r^2 - a^2 \geqq 0,$$

(a は球の半径)によって表わされるが,この式は(1−37)式のような形ではないからである.したがって,重力の場では,球の頂上におかれた質点は,はじめは球の表面に沿ってころがり落ちるが,ついには球から離れてしまう.

拘束はさらに,拘束の方程式が時間を陽な変数として含むか(レオノーマス(rheonomous)),含まないか(スクレロノーマス(scleronomous))に従って分類される.空間に固定された,曲った剛体の針金の上をすべる玉は,明らかにスクレロノーマスな拘束を受けている.もしその針金が,予め定められたある方式で動くならば,その拘束はレオノーマスである.もし,その針金が,たとえば,玉の運動の反動として動くのならば,そのときには拘束の時間依存性は,拘束の方程式の中に,曲った針金の座標(それは,この場合には系の座標の一部である)を通してのみ入ってくることに注意しよう.そのときには全体としての拘束はスクレロノーマスである*.

p.13
拘束は,力学の問題を解く際に,2つの困難を生じさせる.第1に,座標 $\mathbf{r}_i$ は拘束の式によって関係づけられているから,それらはもはやすべてが独立ではない.したがって運動方程式(1−19)も,すべてが独立なわけではない.第2に,拘束力,例えば心棒がそろばん玉に及ぼす力,(あるいは容器の壁が気体の分子に及ぼす力)は,最初からわかっているわけではない.それは,そ

---

*) 拘束に関する術語は極めて詳細にすることができる(Kilmister and Reeve の *Rational Mechanics* (New York: American Elsevier, 1966)を参照).ある使い方として,拘束の方程式が等式であるような**両側**(*bilateral*)拘束と,不等式を含む**片側**(*unilateral*)拘束が区別されることがある.この名称の選び方は,ある面に関係して拘束された運動の例に由来する.ある面上の運動の両側拘束では,拘束力はその面のどちら向きの法線上にあってもよい.球の表面の上,あるいは外側を動く質点は,片側拘束を受けており,その場合には拘束力は1つの方向,すなわち外向き法線方向にのみ作用する.

の問題における未知量の１つであって，求めている解答から得られなければならない．実際，系に拘束を加えるということは，問題の中に，直接指定することはできないで，むしろそれが系の運動に及ぼす効果によって知られるような性質の力が存在するということを，別の方法で述べたものにすぎない．

ホロノミックな拘束の場合には，第１の困難は，**一般化座標**（*generalized coordinates*）を採用することによって解決される．今までは，暗黙のうちに，直交座標を用いて考えてきた．N 個の質点からなる系は，拘束を受けないとき，$3N$個の独立な座標，すなわち $3N$ 個の**自由度**（*degrees of freedom*）をもっている．もし，ホロノミックな拘束があって，それが（１－37）式の形の k 個の方程式によって表わされる場合には，この方程式を用いて，$3N$個の座標のうちから k 個を消去することができて，あとに $3N-k$ 個の独立な座標が残る．このような場合には，系は $3N-k$ 個の自由度をもつといわれる．このような，独立でない座標の消去は，別の方法で表わすこともできる．それは，$3N-k$ 個の新しい独立変数 $q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}$ を導入し，これを用いて，元の座標 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ を

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t) \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t) \end{aligned} \qquad (1-38)$$

の形の式によって表わすことである．拘束は，この式の中に暗に含まれている．これは変数 $(\mathbf{r}_l)$ の組から，変数 (q_l) の組への**変換**（*transformation*）の式である．あるいはいい換えれば，式（１－38）は変数 $(\mathbf{r}_l)$ の組のパラメーター表示と考えることもできる．また変数 (q_l) の組から $(\mathbf{r}_l)$ の組へ逆に変換して戻すこと，すなわち，式（１－38）と k 個の拘束の式を結びつけて，どの q_i も，変数 $(\mathbf{r}_l)$ の組と時間の関数として表わされるように変換し戻すこと，は常に可能であると仮定されている．

一般化座標 q_l は，通常，直交座標とは違って，３個ずつ集って１つのベクトルを形づくるような便利な群に分けることはできない．例えば，球面上を運動するように拘束された質点の場合には，一般化座標は明らかに，球面上の位

置を表わす２つの角，例えば緯度と経度にとることができる．あるいは，１つの鉛直面内で運動する２重振子（double pendulum）（２つの質点を，伸び縮みしない軽い棒でつなぎ，一方の質点を同じような棒に固定して吊したもの）の例では，一般化座標は，２つの角 θ_1 と θ_2 である（図１－４参照）．一般化座標は，直交座標以外の座標という意味で，拘束のない系で用いても便利なことがしばしばある．例えば，外からの中心力の場（$V=V(r)$）の中を運動する質点の問題 p.14 では，拘束はないけれども，明らかに，直交座標を用いるよりも，球面極座標（spherical polar coordinates）を用いる方が便利である．しかし，一般化座標を，普通の直交位置座標と同じような意味に考えてはいけない．どんな種類の量でも，一般化座標として用いることができるのである．例えば，$\mathbf{r}_j$ の Fourier 展開における振幅を，一般化座標として用いることもできるし，あるいは，エネルギー，または角運動量のディメンションをもつ量を用いる方が便利な場合もある．

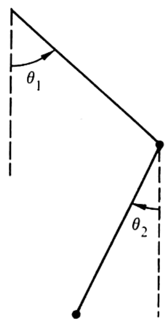


図 1－4
２重振子

拘束が非ホロノミックな場合には，拘束を表わす式を，独立でない座標を消去するために使うことはできない．非ホロノミックな拘束の例で，よく引き合いに出されるのは，粗い面の上を滑らずにころがる物体である．この系を記述するために用いられる座標の中には，一般にその面上における物体の位置（location）を表わす１組の座標に加えて，物体の方位（orientation）を定める角座標（angular coordinates）が含まれる．“ころがり” を強制する拘束のため

に，この2組の座標は一定の関係をもっていて，互いに独立ではない．物体の接触点の位置が変われば，必然的にその方位も変わるが，“ころがり”の条件は（1－37）式のような，座標の間の関係として表わせないから，これによって座標の数を減らすことはできない．ころがりの条件は，むしろ速度に対する条件（すなわち，接触点が滑り動かないという条件）である．つまり，問題を解いてから後に，はじめて積分した形で与えられるような，微分形の条件である．

簡単な例を挙げれば，この点がはっきりするであろう．そのために，水平な xy-平面上をころがる円盤が，いつでもその面を鉛直に保って運動するように拘束されている場合を考えよう．この運動を記述する座標として，円盤の中心の座標 x, y と，円盤の軸のまわりの回転角 ϕ，および円盤の軸と例えば x 軸の間の角 θ を用いることができよう（図1－5参照）．拘束の結果として，円盤

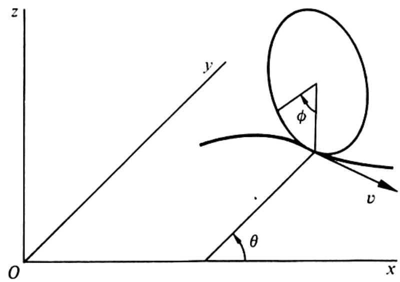


図 1—5
水平面上をころがる鉛直な円盤.

の中心の速度 $\mathbf{v}$ の大きさは $\dot{\phi}$ に比例する．すなわち

$$v = a\dot{\phi}.$$

p.15

ここで a は円盤の半径である．そして，この速度の方向は，円盤の軸に垂直である．したがって次のようになる．

$$\dot{x} = v\sin\theta,$$
$$\dot{y} = -v\cos\theta.$$

この2つの条件を結びつけると，拘束を表わす2つの微分方程式

$$dx - a\sin\theta\, d\phi = 0,$$
$$dy + a\cos\theta\, d\phi = 0, \qquad (1-39)$$

が得られるが，これら（1－39）の微分方程式は，問題全体を解かなければ積分することができない．すなわち，この両方を完全微分に変えるような，積分因子 $f(x, y, \theta, \phi)$ を見出すことはできない（演習問題7を参照）*．それゆえ，この拘束は（1－37）式の形にすることはできず，したがって非ホロノミックである．物理的に，われわれは，ϕ と他の座標 x, y および θ の間には，直接の関数関係のないことを知ることができる．それを見るには次のことに注意すればよい．円盤は，その道筋のどの点でも，その道筋に接し，かつ任意の半径をもつ円のまわりを，ころがらせることができる．その過程の終りでは，x, y および θ は最初の値に戻るが，ϕ は円の半径に依存してある量だけ変化している．

（1－39）式の形の，積分できない，微分形の拘束は，もちろん非ホロノミックな拘束の唯一の型ではない．拘束条件は，高階導関数を含むかもしれないし，あるいは，われわれがすでに見たように，不等式の形で現われるかもしれない．

独立でない座標が消去できるということが1つの理由になって，ホロノミックな拘束を含む問題では常に，形式的な解を求めることが容易である．しかし，非ホロノミックな問題を攻めて行く一般的な方法はない．なるほど，積分でき
p.16 ない拘束の場合でも，運動の微分方程式と共に拘束の微分方程式を問題の中に取り入れ，Lagrange の未定乗数法を用いて，事実上独立でない方程式を消去することはできる．この方法については後で述べる．しかし，非ホロノミックな拘束で，最も扱いにくい場合には，1つ1つ別々に取り組まなければならない．そのために，古典力学のもっと形式的な面を展開して行く際には，拘束のある場合には殆ど必ず，ホロノミックであると仮定する．この制限は，日常出会う拘束の多くが，非ホロノミックであるにもかかわらず，理論の適用を甚だしく制限するものではない．その理由は，心棒，面，あるいは壁などの手段によって，系に加えられる拘束という概念全体が，巨視的な問題，いい換えると，大

---

*）原理的には，ただ2つの座標を含む系における，拘束についての1階微分方程式に対しては，常に積分因子を見出すことができる（Kaplan, *Advanced Calculus*, 2nd ed. p. 531参照）．したがって，そのような拘束はホロノミックである．親しみ深い例は，斜面上をころがる円の2次元的運動である．

きな尺度における問題だけに特に適合したものである，ということである．現代の物理学者は，まず第1に原子の問題に関心を持っている．この尺度においては，すべての対象は，系の内においても外においても，同様に分子，原子あるいは，もっと小さい粒子からできていて，これらの粒子が一定の力を及ぼし合っている．したがって，拘束というような概念は，人工的なものになってしまって，めったに現われない．そのようなときには，拘束は，実際の物理的な場合に対する，数学的な理想化，あるいは，量子力学的な性質に対する古典的な近似 — スピンに対する剛体の回転のように — として用いられるだけである．そのような拘束は，常にホロノミックであって，理論の枠の中にうまく適合するのである．

拘束の力が，最初からわかってはいない，という第2の困難に打ち勝つためには，拘束の力が消えてしまうように，力学の方程式を定めて行くことが望ましい．そうすれば，わかっている力だけを取り扱えばよいことになる．このためにとるべき手順のヒントは，拘束をもった特別の系，すなわち剛体では，内力（これがこの場合における拘束力である）によってなされる仕事が零になるという事実によって与えられる．次の節からは，この糸口をたどって，その中に含まれている考え方を一般化していこう．

1−4　D'Alembert の原理と Lagrange の方程式

1つの系の仮想（無限小）変位（virtual (infinitesimal) displacement)というのは，**与えられた瞬間 t において，その系に加えられている力と拘束に矛盾しないように，**座標の勝手な無限小変化 $\delta\mathbf{r}_i$ を行った結果として起こる系の配置の変化のことである．この変位を仮想というのは，時間間隔 dt の間に，系に起こる実際の変化と区別するためである．後者では，その時間の間に力と拘束が変わっていってよい．系が釣合の状態にあって，各質点に作用する力の合力が零，すなわち，$\mathbf{F}_i=0$ であると仮定しよう．そうすると明らかに，変位 $\delta\mathbf{r}_i$ が行われる際に，力 $\mathbf{F}_i$ のなす仮想仕事（virtual work）を与えるスカラー積，$\mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i$ も零になる．このような零になる積は，すべての質点について和をとってもやはり零で，

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \tag{1-40}$$

でなければならない．いままでのところでは，新しい物理的内容をもつようなことは，何もいっていない．$\mathbf{F}_i$を，加えた力（applied force）$\mathbf{F}_i^{(a)}$と，拘束の力（force of constraint）$\mathbf{f}_i$に分けて，

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i\,, \tag{1-41}$$

p.17
とすると，（1－40）は，

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0\,, \tag{1-42}$$

となる．ここで，**拘束の力による仮想仕事が零になるような**系を考えることにしよう．この条件は，剛体に対しては正しく成立することはすでに見てきたが，その他の多くの拘束に対しても成立する．例えば，質点が1つの面上を運動するように拘束されている場合には，拘束力はその面に垂直であるが，仮想変位は面に接しなければならないから，仮想仕事は零になる．このことは，すべりの摩擦力が存在する場合にはもはや正しくないから，そのような系は，われわれの今行っている定式化からは取り除かなければならない．この制限は，摩擦が本来巨視的な現象であるから，ひどく妨げになるものではない．他方，ころがりの摩擦力は，この条件を侵すことはない．なぜなら，この力は，瞬間的に静止している1点で働らき，ころがりの拘束に矛盾しない1つの無限小変位においては仕事をすることはできないからである．もし質点が，それ自身時間的に変化する面に拘束されている場合には，たとえ時間 dt の間の実際の変位においてなされる仕事が必ずしも零にならないときでさえ，拘束力は瞬間的に面に垂直であって，仮想変位における仕事は零であることに注意しよう．

こういうわけで，系の釣合に対する条件として，その系に**加えられた力**による仮想仕事が零であるという条件，

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0\,, \tag{1-43}$$

が得られる．（1－43）式はしばしば，**仮想仕事の原理**（*principle of virtual work*）と呼ばれる．ここでは，$\delta \mathbf{r}_i$の係数はもはや零に等しいとおくことはで

きない．すなわち，一般に $\mathbf{F}_i^{(a)} \neq 0$ であることに注意しよう．これは，$\delta\mathbf{r}_i$ が完全に独立ではなく，拘束によって関係づけられているからである．係数を零に等しいとおくためには，この原理を，独立な座標 q_i の仮想変位を含む形に書き変えなければならない．(1−43)式は，$\mathbf{f}_i$ を含まないという点では，われわれの要求を満たしているが，静力学(statics)だけしか取り扱っていない．われわれの求めているのは，系の一般的な運動を含む条件である．

そのような原理を得るために，はじめJames Bernoulliによって思いつかれ，D'Alembertによって発展させられた考えを利用しよう．運動方程式，

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i,$$

は，

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0,$$

と書くことができる．この式は，系内の質点が，実際の力(actual force)と，"逆有効力"(reversed effective force)$-\dot{\mathbf{p}}_i$ との和に等しい力の下で釣合っていることを示している．このように考えると，動力学(dynamics)が静力学に還元され，式(1−40)の代わりに，ただちに，

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0, \qquad (1-44)$$

p.18 と書くことができる．そして，前と同じように，実際の力を，加えた力と拘束の力に分解すれば，

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0,$$

という結果が得られる．ここでも，拘束力による仮想仕事が零になるような系だけに制限する．したがって，

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0, \qquad (1-45)$$

が得られる．この方程式はしばしば*D'Alembert*の原理と呼ばれる．この中に拘束力がもはや現われないという点では，われわれの目的は達せられた．そして，これからは肩につけた添字$^{(a)}$を落しても，まぎらわしいことはない．しかしこの式は，まだ系の運動方程式を与えるのに便利な形にはなっていない．そこで今度は，この原理を，一般化座標 q_i についての仮想変位を含むような表

現に変形しなければならない．そうすれば，一般化座標は（ホロノミックな拘束に対しては）互いに独立であるから，δq_iの係数を別々に零に等しいとおくことができる．

$\mathbf{r}_i$の表現を q_j の表現に変えるには，変換式（1－38）

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

（n個の独立な座標があるものと仮定する）から出発して，偏微分法の普通の“連鎖規則”（chain rules）を用いればよい*．すなわち $\mathbf{v}_i$ は，

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\ , \qquad (1-46)$$

によって $\dot{q}_k$ で表わされる．同じように，任意の仮想変位$\delta\mathbf{r}_i$は，次の式によって仮想変位δq_jと関係づけられる．

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\ . \qquad (1-47)$$

定義によって，仮想変位としては，座標の変位だけを考えているから，この式の中には時間の変分 δt は含まれていないことに注意しよう（拘束自身が時間的に変化する場合には，このように考えたときにだけ，仮想変位が拘束力に垂直になるのである）．

一般化座標を用いると，$\mathbf{F}_i$による仮想仕事は，

$$\sum_i \mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\ \delta q_j = \sum_j Q_j\,\delta q_j, \qquad (1-48)$$

p.19 となる．ここで Q_jは，**一般化力**（*generalized force*）の成分と呼ばれ，

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \qquad (1-49)$$

で定義される．q_jが長さのディメンションをもつ必要がないのと同じように，Q_jもまた必ずしも力のディメンションをもつとは限らないが，$Q_j\delta q_j$ はいつでも仕事のディメンションを持たねばならないことに注意しよう．

次に，（1－45）式に含まれているもう1つの項を考えよう．これは次のよ

*）例えば，Kaplan, *Advanced Calculus,* 2d ed., p.135 を見よ．

うに書くことができる.

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \ .$$

$\delta \mathbf{r}_i$を(1−47)式によって表わすと，この式の右辺は，

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \ ,$$

となる．ここで，次のような関係式を考えよう.

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\}. \qquad (1-50)$$

(1−50)式の最後の項では，tと q_jに関する微分を交換することができる．なぜなら,(1−46)式と同じようにして,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j},$$

となる．最後の式の変形は再び(1−46)式によった．さらに,(1−46)式によって,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \ , \qquad (1-51)$$

であることもわかる．この2つの変形を(1−50)式に入れると,

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right\},$$

という結果が得られる．したがって(1−45)式の中の左辺の項は,

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j \ ,$$

の形に展開される．$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$を，系の運動エネルギー$T$に等しいとおくと，D'Alembertの原理は,

$$\sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \qquad (1-52)$$

p.20

となる．直交座標系では，Tの q_j に関する偏導関数は零になることに注意しよう．微分幾何学の言葉でいえば，この項は座標 q_j の曲率から生じてくるのである．例えば極座標では，向心加速度(centripetal acceleration)の項が現われる

のは，T の角座標に関する偏導関数の中である．

ここまでは，拘束の性質については，拘束力が仮想変位において仕事をしない，ということ以外は何も制限をしていない．変数 q_j は，系の運動を記述するために用いられるどんな座標の組でもよい．しかしながら，もし拘束がホロノミックであるならば，そのときには，変換方程式（１－38）の中に，暗黙のうちに拘束条件を含むような，独立な座標の組 q_j を見出すことができる．そうすると，どの仮想変位 δq_j も δq_k とは独立であるから，（１－52）式が成立するただ１つの仕方は，各係数がそれぞれ別々に零になること，すなわち，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \tag{1-53}$$

が成立することである．このような方程式は，全部で n 個ある．

方程式（１－53）は Lagrange の方程式といわれることがよくあるが，この名称は，力がスカラー・ポテンシャル関数 V から導かれて，

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V \ ,$$

である場合の方程式（１－53）の形のために取っておかれることもしばしばある．この場合には，一般化力は，

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \ ,$$

と書くことができる．この最後の式は，関数 $-V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t)$ の q_j に関する偏導関数と全く同じ式である．したがって，

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \tag{1-54}$$

である．そうすると，方程式（１－53）は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0, \tag{1-55}$$

と書き直すことができる．

（１－55）の形の運動方程式は，必ずしも保存系に制限されるものではない：V が時間を陽に含まない関数であるときに限って，系は保存的である（６ペー

ジ参照）．しかしながら，ここで定義したように，ポテンシャルVは一般化速度には依存しない．それゆえ，$\dot{q}_j$に関する偏導関数の項にVを含ませることができる．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial(T-V)}{\partial q_j}=0.$$

あるいは，新しい関数，ラグランジアン（*Lagrangian*）Lを

$$L=T-V, \qquad (1-56)$$

p.21
で定義すれば，方程式（1−53）は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0\ , \qquad (1-57)$$

となる．この書物では，特に断わらない限り，“Lagrange方程式”という言葉を用いるときには，方程式（1−57）を意味するものとする．

運動方程式のある特別な組に対しては，方程式（1−57）が与えられた一般化座標における運動方程式を与えるような，ラグランジアンの選び方が，一義的でない場合があることは注意しておかなければならない．このことは，演習問題14で示される．すなわち，もし，$L(q,\dot{q},t)$が適当なラグランジアンであり，また$F(q,t)$が，一般化座標および時間について微分可能な任意の関数であるならば，

$$L'(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{dF}{dt}$$

が，やはり同じ運動方程式を与える1つのラグランジアンである．また，この処方によって作られるラグランジアンの他に，別のものを見出すことができる場合もしばしばある（演習問題18）．（1−56）式は，保存系に対してラグランジアンを構成するのに常に適当な方法ではあるが，それは，与えられた系に対して唯一の適切なラグランジアンを与えるものではない．

1−5　速度に依存するポテンシャルと散逸関数

たとえ普通の意味で，ポテンシャル関数Vが存在しない場合であっても，一般化力が，ある関数$U(q_j,\dot{q}_j)$から，次のような仕方，

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right), \tag{1-58}$$

で得られるとすれば，Lagrangeの方程式は（1－57）式の形に書くことができる．そのような場合でも，やはり方程式（1－57）は，

$$L = T - U, \tag{1-59}$$

で与えられるラグランジアンを用いて，方程式（1－53）から導かれる．Uは，“一般化ポテンシャル”（generalized potential）あるいは，“速度に依存するポテンシャル”（velocity-dependent potential）といってもよい*. そのような

p.22
“ポテンシャル”を使う可能性は，単にアカデミックなものではない．それは，非常に重要な力の場，すなわち，運動している電荷に働らく電磁力（electromagnetic force）に対して適用されるのである．この問題の重要さを考えれば，ここでこの問題に寄り道をしておくのも，十分価値のあることである．

Gaussの単位系では，Maxwellの方程式は，

$$\begin{aligned} &\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, && \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ &\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}, && \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \tag{1-60}$$

となる．電荷qに作用する力は，電気力，

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q\nabla\phi,$$

だけで完全に与えられるわけではないから，系はこの意味で保存的ではない．

---

*）このようなポテンシャルに与えられた名称の由来は，奇妙なものである．Weberの初期の古典電気力学（それには誤りがある）では，速度に関係する力を仮定しているが，明らかにこれに刺戟されて，ドイツの数学者E. Scheringがはじめて，真剣にこのような力を力学の枠の中に入れようと試みたようである．Gött. Abh. **18**, 3 (1873) 参照．こういう所から，Whittakerは，その解析力学（*Analytical Dynamics*）の初版（1904）で，このポテンシャルを“Scheringのポテンシャル関数”として引用している．しかし，この名称は，後の版では落されているところからみて，明らかに長つづきしなかったものである．もっと最近になって，MorgensternとSzabóは（*Vorlesungen über Theoretische Mechanik*, 1961の中で），回転する座標系におけるコリオリの力を与える，速度に依存する特殊なポテンシャルに対して，“Scheringポテンシャル”の名称を用いた．われわれは，この名称で表わされるものの中に，位置のみの関数である，普通のポテンシャル・エネルギーをも含めて，“一般化ポテンシャル”という言葉を用いることにしよう．

力の全体は，これに代わって，

$$\mathbf{F} = q\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right\}, \tag{1−61}$$

で与えられる．$\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$であるから，$\mathbf{E}$をあるスカラー関数の勾配として表わすことはできない．しかし$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$であるから，$\mathbf{B}$をあるベクトルの回転（カール，curl）として表わせることがわかる．すなわち，

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{1−62}$$

である．この$\mathbf{A}$を，磁気ベクトル・ポテンシャル（magnetic vector potential）という．そうすると$\nabla \times \mathbf{E}$の方程式は，

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

となる．したがって，

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi,$$

あるいは，

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{1−63}$$

とおくことができる．ポテンシャルϕおよび$\mathbf{A}$を用いると，いわゆるLorentzの力（1−61）は，

$$\mathbf{F} = q\left\{-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})\right\} \tag{1−64}$$

となる．（1−64）式の各項は，もっと便利な形に書き換えることができる．1つの例として，x-成分，

$$(\nabla\phi)_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

および

p.23

$$(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x = v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$
$$= v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} - v_x\frac{\partial A_x}{\partial x},$$

を考えよう．この最後の式では，

$$v_x \frac{\partial A_x}{\partial x},$$

という項を加えて，また引いてある．ところで，A_xの時間に関する全導関数（total time derivative）は，

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right),$$

である．右辺の第1項は，A_xに陽に含まれている t に関する変化からでてくるものであり，第2項は，質点の運動によって，A_xの値を求める空間の点が，時間と共に変化する結果として生ずるものである．したがって $\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}$ の x 成分は，

$$(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t},$$

と書くことができる．これらを代入すると式（1－64）は，

$$F_x = q\left\{ -\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi - \frac{1}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v_x}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right) \right\} \qquad (1-64')$$

となる．スカラー・ポテンシャルは速度に無関係であるから，この式は

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_x},$$

と同じである．ただし，

$$U = q\phi - \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \qquad (1-65)$$

である．Uは，（1－58）式の意味での一般化ポテンシャルであって，電磁場における荷電粒子に対するラグランジアンは，

$$L = T - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \qquad (1-66)$$

と書くことができる．

もし系に働いている力のすべてがポテンシャルから導かれるものではないとしても，Lagrangeの方程式は，いつでも，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j,$$

p.24
の形に書けることは注意すべきことである．ここでLは，前のように，保存力のポテンシャルを含み，Q_jはポテンシャルから導かれない力を表わす．このような事態は，摩擦力がある場合にしばしば起こる．摩擦力が質点の速度に比例し，したがってそのx成分が，

$$F_{fx} = -k_x v_x$$

の形をもっている場合がよくある．この型の摩擦力は，*Rayleigh* の散逸関数（*dissipation function*）として知られている関数$\mathscr{F}$を用いて導き出すことができる．この関数は，次のように定義される．

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2}\sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2), \qquad (1-67)$$

ただし，右辺の和は系の質点について行う．この定義から，明らかに，

$$F_{fx} = -\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial v_x},$$

あるいは，記号的に書けば，

$$\mathbf{F}_f = -\nabla_v \mathscr{F} \qquad (1-68)$$

である．この散逸関数に，物理的な解釈を与えることもできる．すなわち，摩擦に抗して，系によってなされる仕事は，

$$dW_f = -\mathbf{F}_f \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v}\,dt = (k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2)\,dt$$

であるから，$2\mathscr{F}$が摩擦力によるエネルギー散逸の割合となる．このようにして，摩擦力から生ずる一般化力の成分は，

$$\begin{aligned} Q_j = \sum_i \mathbf{F}_{if} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= -\sum_i \nabla_{v_i} \mathscr{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\sum_i \nabla_{v_i} \mathscr{F} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}, \qquad \text{（1−51）式による．} \\ &= -\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned} \qquad (1-69)$$

で与えられる．そうすると，Lagrangeの方程式は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}+\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \dot{q}_j}=0, \tag{1-70}$$

となるから，運動方程式を得るためには，２つのスカラー関数 L と $\mathscr{F}$ を指定しなければならない．

p.25

1−6　ラグランジアン形式の簡単な応用

前の２つの節では，ラグランジアンを定義することのできる系，すなわち，加えられた力が普通のポテンシャルまたは一般化ポテンシャルから導かれ，拘束力が仕事をしないホロノミックな系に対しては，運動方程式を立てるのに大変便利な方法があることを見た．われわれは，運動方程式から拘束力を消去しようとして，ラグランジアン形式に導かれたが，この目標を達成するとともに，そのほかにも多くの利益を得ることができた．もとの形の運動方程式（1−19）を立てるときには，多くの**ベクトル的な**力や，加速度を取り扱わなければならなかったが，ラグランジアンの方法では，２つの**スカラー**関数 T および V を取り扱えばよいから，問題は非常に簡単になる．今や，ラグランジアン形式の適用できるすべての力学の問題に対して，簡単な，決まりきった手順を定めることができる．すなわち，T および V を一般化座標で書き，これから L を作り，（１−57）式に代入しさえすれば，運動方程式が得られるのである．このために必要な T および V の，直交座標から一般化座標への変換は,（１−38）式および（１−46）式を適用すれば得られる．すなわち T は，一般に，

$$T=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)^2,$$

で与えられる．この右辺を展開すれば，T が一般化座標で，

$$T=M_0+\sum_j M_j\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{j,k}M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k\ , \tag{1-71}$$

の形に表わされることは明らかである．ここで，M_0, M_j, M_{jk} は，$\mathbf{r}_i$ および t，したがってまた q_j および t のある定まった関数である．実際，係数を比較してみれば，

$$M_0 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 ,$$

$$M_j = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} , \qquad (1-72)$$

および,

$$M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} ,$$

であることがわかる．このように，系の運動エネルギーは常に，３つの一般化速度の同次関数の和として書くことができる．

$$T = T_0 + T_1 + T_2 . \qquad (1-73)$$

ここで，T_0は一般化速度を含まず，T_1は一般化速度について１次，T_2は一般化速度について２次の項である．もし変換の式が時間を陽に含まないならば，すなわち拘束が時間に無関係（スクレロノーマス）であるならば，（1－71）式の p.26 最後の項だけが零でないから，Tは常に一般化速度について同次２次形式になる．

さて，この手順の簡単な例をいくつか考えてみよう．

1. 空間における１個の質点
   a．直交座標
   b．平面極座標
2. Atwoodの機械
3. 時間と共に変わる拘束 ― 回転する心棒に沿って滑り動く玉

1.（a）１個の質点の運動：直交座標を用いた場合

方程式（1－53）を立てるのに必要な一般化力は，明らかにF_x, F_y, F_zである．そうすると，

$$T = \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

であり，したがって運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z. \qquad (1-74)$$

である．このようにして，最初の Newton の運動方程式に戻ってきた．

(b) **1個の質点の運動：平面極座標を用いた場合**　この場合には T を $\dot{r}$ および $\dot{\theta}$ で表わさなければならない．変換式，すなわち式（1－38）は，このときは単に，

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$

である．（1－46）式と同じように，速度は，

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta,$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta,$$

で与えられる．そうすると，運動エネルギー $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ は，上の式を用いて，

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) \qquad (1-75)$$

となる．（1－75）式のもう1つ別の導き方は，平面極座標における速度成分が，$\mathbf{r}$ に沿っては $\dot{r}$，$\mathbf{r}$ に垂直な方向（この方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}$ で表わす）に
p.27
沿っては $r\dot{\theta}$ であることに注意すれば得られる．したがって，速度の2乗を極座標で表わすと，簡単に $\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$ となる．一般化力の成分は，（1－49）式の定義から得られて，

$$Q_r = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} = F_r,$$

$$Q_\theta = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \mathbf{F}\cdot r\mathbf{n} = rF_\theta,$$

となる．後の場合には，θ に関する $\mathbf{r}$ の導関数が，導関数の定義によって，$\mathbf{n}$ 方向のベクトルになるからである（図1－6参照）．一般化座標は2個あるから，Lagrange の方程式も2個ある．r の方程式の中に現われる導関数は，

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r},$$

で，方程式は，

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r,$$

となる．左辺の第 2 項は，向心加速度 (centripetal acceleration)の項である．θ の方程式に対しては，導関数，

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$

が得られるから，方程式は

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta$$

となる．この左辺は，ちょうど角運動量の時間に関する導関数で，右辺はまさに加えられたトルクであるから，これは単に，力のモーメントの運動方程式 (1 − 26) がふたたび導かれただけであることに注意しよう．

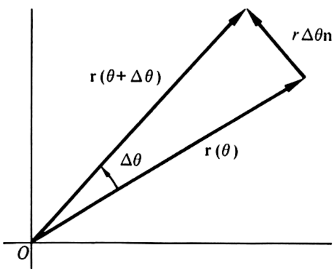


図 1−6
$\mathbf{r}$ の θ に関する導関数.

2.　**Atwoodの機械** ― ホロノミックでスクレロノーマスな拘束をもった，p.28 保存系の例 (滑車には摩擦もなく，質量もないものと仮定する)．明らかに，独立な座標はただ 1 つ x である．というのは，一方のおもりの位置は，ロープの長さが l であるという拘束によって決められるからである．位置エネルギーは，

$$V = -M_1 gx - M_2 g(l - x),$$

で，運動エネルギーは，

$$T=\frac{1}{2}(M_1+M_2)\dot{x}^2 \ ,$$

である．この2つの式から，ラグランジアンは，

$$L=T-V=\frac{1}{2}(M_1+M_2)\dot{x}^2+M_1gx+M_2g(l-x) \, ,$$

の形になる．運動方程式はただ1つで，それに含まれる導関数は，

$$\frac{\partial L}{\partial x}=(M_1-M_2)g \ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(M_1+M_2)\dot{x} \ ,$$

であるから，

$$(M_1+M_2)\ddot{x}=(M_1-M_2)g \ ,$$

すなわち，

$$\ddot{x}=\frac{M_1-M_2}{M_1+M_2}g \, ,$$

が得られる．これは，もっと初歩的な方法でも得られる，よく知られた結果である．この問題は，わかりきったものであるが，この問題でも，ラグランジアン形式では，どこにも拘束力（ここではロープの張力）が現われないことがはっきりする．そういうわけで，ロープの張力を，ラグランジアンの方法によって直接求めることもできないのである．

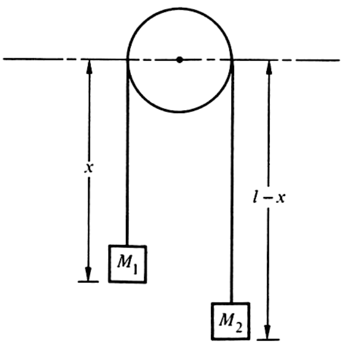


図1—7
Atwoodの機械.

p.29

3. 自由な（ *force-free* ）空間において，一様な角速度で回転している心棒の上を滑り動く玉． 針金は真っ直ぐで，その針金に垂直なある固定軸のまわりに一様に回転している．この例題を選んだのは，拘束が時間と共に変わる簡単な実例を示すためである．この場合の変換式は，時間を陽に含み，

$$x = r\cos\omega t, \qquad y = r\sin\omega t. \qquad \omega = \text{回転の角速度}$$

である．そうすると T（この場合には L と同じである）は，(1－71)式を得るために用いたのと同じ手続きでも求められるが，そうするよりも，(1－75)式を直接もってきて，拘束を $\dot{\theta} = \omega$ の関係で表わす方が簡単である．すなわち，

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)$$

とするのである．今度は，$\dot{r}$ を含まない付加項がはいっているから，T は，一般化速度について，同次２次関数ではないことに注意しよう．そうすると，運動方程式は，

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = 0$$

すなわち，

$$\ddot{r} = r\omega^2$$

となる．これは，遠心加速度（centrifugal acceleration）のために，玉が外の方向に向って動くという，よく知られた結果である．ここでもまた，この方法では，玉が心棒の上を動くように拘束する力を与えることはできない．

参　考　書*)

K.R. Symon, *Mechanics.*　非常によく，また極めて詳細な，力学に関する中級程度の教科書であって，本書の準備として，またしばしば補充として読めば大きな利益がある．この章の題材に対しては，第４章の，保存則と質量の変わる系（ロケットのような）の議論，および第９章の，拘束に関する広汎な考察に，とくに注意されたい．

W. Hauser, *Introduction to the Principles of Mechanics.*　多くの，新鮮なまた

*) 各章の終りに挙げてある参考書は，便宜上，簡単に書名だけが書いてある．それらの書物についての詳しいことは，本書の（下巻）最後の参考書一覧のところにある．

独創的な観点に立った，別の中級程度の教科書である．とくに，一般化座標として曲線座標を用いた場合にNewtonの運動方程式としての，(1－53)式の形のLagrangeの運動方程式の議論に注意するとよい．

C. W. Kilmister and J. E. Reeve, *Rational Mechanics.*　数学的に徹底的に述べられ，数学の学生のために計画された，中級の力学の書物．特に注目に値することは，拘束の広範囲な議論と，力学の基本概念を公理論的定式化するための，簡単化された試みである．

C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics.*　書名が示すよりも，はるかに広い内容をもつこの書物は，事実，いろいろな定式化の基礎に力点をおいた，すべての力学の概観である．多くの洞察に富んだ歴史的ノートが含まれている．

p. 30
W. F. Osgood, *Mechanics.*　この書物は長い間絶版になっているが，今でも探してみる価値がある．この本の最初の5章は，力学の基礎的な入門書となっていて，著者の教育者としての長い経験によって，楽しく読めるものになっている．この点について，読者はとくに，その102ページに注意を引かれるだろう！

E. Mach, *The Science of Mechanics.*　古典力学の基礎概念に関して，一流の分析と批判を与えた書物である．この書物の初期の版は，相対性理論への道を哲学的に明らかにするために，非常に役立った．

R. B. Lindsay and H. Margenau, *Foundations of Physics.*　第3章には，古典力学の基礎に関する明快な議論がしてある．この書物はMachの書物とともに，力学の基礎概念の性質について，さらに勉強するための，すぐれた出発点として役立てることができる．

P. W. Bridgman, "*Significance of the Mach Principle,*" *American Journal of Physics* **29**, 32-36, Jan. 1961.　この論文は，"固定された"(fixed)星の座標系が，なぜ，そしてどの範囲まで，一つの慣性系を操作的に定義するものと考えられるかを論じている．

C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics.*　文体は高度に個性的で力強く，論ばくを許さない．しかしこれらのエッセーは，強い歴史的な感覚に満たされており，また深い学識によって支えられている．とくに興味があるのは，この書物には，"運動量のモーメントの法則はどこから？"という章があることである．ここでは，角運動量に対するいろいろな保存則の，歴史的発展が述べられている．ほとんど同じ見地からの，より数学的に詳細な，また連続的な系に力点をおいた議論は，次の参考書の第196節に与えられている．

C. Truesdell and R. A. Toupin, *The Classical Field Theories.*　これは*Encylope-*

dia of Physics の Vol. 3/1 の一部をなす，567 ページにわたる書物である．偶然，この後者の書物の 788 ページ以下の参考書一覧は，力学の形式的公理論的取り扱いに関する（1957 年までの）文献の集成を与えている．

E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics.* 比較的古い観点から，解析力学の完全な論述を与えている有名な書物である．惜しいことに，この書物では，議論を進めていく際に，明らかに図やベクトル記法を用いることを嫌い（図は全部で 4 つしかない），また Cambridge 大学の優等試験で有名になった，衒学的な力学の問題の型を好む点が目立つ．しかし，今でも，多くの特殊な題目について議論をするための，実際上ただ 1 つの拠り所となっている．本書のこの章に対しては，主としてこの書物の第 II 章とくに，速度に関係するポテンシャルを論じている第 31 節を参照するとよい．第 VIII 章の第 92 節から第 94 節までは，散逸関数について書いてある．

LORD RAYLEIGH, *The Theory of Sound.* このすぐれた書物の第 I 巻，第 IV 章で散逸関数が導入されている．

演 習 問 題

1. 最初に静止していた原子核が，運動量 1.73 MeV/c の電子と，それに垂直な方向に，運動量 1.00 MeV/c のニュートリノ（neutrino）を放出して，放射性の崩壊を起こす（MeV（million electron volt）は，百万電子ボルトを表わす．これは近代物理学で用いられるエネルギーの単位で，1.60×10^{-6} erg に等しい．同様に，MeV/c は運動量の単位で，5.34×10^{-17} gm-cm/sec に等しい）．原子核はどの方向に反跳（recoil）を受けるか？ その運動量は何 MeV/c であるか？ もし残りの原子核の質量が 3.90×10^{-22} gm ならば，その運動エネルギーは何 eV か？

p.31

2. 地球上における質点の**脱出速度**（*escape velocity*）は，その質点が地球の重力場から脱出することができるために，地球の表面上で与えなければならない最小の速度である．大気の抵抗を無視すると，系は保存的である．位置エネルギーと運動エネルギーの和の保存則から，地球に対する脱出速度は，月の存在を無視すると，6.95 mi/sec になることを示せ．

3. ロケットは，その尾部から放出される排気ガスの運動量の反作用によって推進される．このガスは，ロケットが積んでいる燃料の反応によって生ずるものであるから，ロケットの質量は一定ではなくて，燃料が消費されるに従って減少する．一様な重力の場で，鉛直上方に打ち上げられたロケットの運動方程式は，空気の抵抗を無視すると，

$$m\frac{dv}{dt} = -v'\frac{dm}{dt} - mg,$$

となることを示せ．ここでmはロケットの質量で，v'はロケットに対する，排気ガスの速度である．vをmの関数として求めるために，質量の失なわれる時間的割合は一定であると仮定して，この方程式を積分せよ．ロケットが最初，静止の状態から出発し，v'が6800 ft/secに等しく，また毎秒失われる質量が，最初の質量の1/60に等しいとき，脱出速度を得るためには，燃料の重さと，空のロケットの重さの比が，殆ど300もなければならないことを示せ．

4.　質量一定の1個の粒子に対して，運動方程式は，その運動エネルギーに対して，次の微分方程式を与えることを示せ．

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,.$$

一方，質量が時間と共に変わるときには，対応する方程式は，

$$\frac{d(mT)}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{p}\,,$$

になることを示せ．

5.　任意の原点に対する，質量中心の位置ベクトルの大きさRは，次の式で与えられることを証明せよ．

$$M^2R^2 = M\sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2\,.$$

6.　2個の粒子の系が，運動方程式（1－22）および（1－26）に従うことが知られているとしよう．そのときに，個々の粒子の運動方程式から，2個の粒子間の内力は，作用・反作用についての弱法則，強法則の両方を満足することを示せ．この議論は，任意の個数の粒子から成る系にまで一般化されるであろう．このようにして，方程式（1－22）および（1－26）へ導く議論の逆が証明される．

7.　ころがる円盤に対する拘束の方程式，（1－39）式は，

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_1,\ldots,x_n)\,dx_i = 0,$$

p.32
の形の拘束の一般的な線型微分方程式の，1つの特別な場合である．この形の拘束条件は，それを完全微分に変えるような積分因子 $f(x_1,\ldots,x_n)$を見出すことができるときに限って，ホロノミックである．明らかに，その関数は，すべての $i \neq j$ に対して，

$$\frac{\partial(fg_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(fg_j)}{\partial x_i}$$

を満たすようなものでなければならない．方程式（1－39）のいずれに対しても，そのような積分因子を見出すことはできないことを示せ．

8. 半径 a の２つの車輪が，長さ b の共通の車軸にとり付けられており，車輪は独立に回転するようになっている．この系が，平面上を滑ることなくころがる．この場合，つぎの２つの非ホロノミックな拘束の方程式があることを示せ．

$$\cos\theta\,dx + \sin\theta\,dy = 0,$$

$$\sin\theta\,dx - \cos\theta\,dy = a(d\phi + d\phi').$$

（ここに，θ, ϕ および ϕ' は，単一の垂直円盤のときと同じような意味をもち，また (x, y) は２つの車輪の間の車軸の中間点の座標である.）またこの他に，１つのホロノミックな拘束の方程式，

$$\theta = C - \frac{a}{b}(\phi - \phi'),$$

があることを示せ．ここに，C は定数である．

9. １個の質点が x–y 平面上で運動している．この質点は，その速度ベクトルが常に，座標がある与えられた関数 $f(t)$ で与えられる x 軸上の点の方向に向くような拘束を受けている．微分可能ではあるが，それ以外は任意な関数 $f(t)$ に対して，拘束は非ホロノミックであることを示せ．

10. 質量 m の２質点が，長さ l の重さのない剛体の棒でつながれている．その中心は，半径 a の円の上を動くように拘束されている．一般化座標における運動エネルギーの式を立てよ．

11. （１－53）の形の Lagrange の方程式は次の形に書くこともできることを示せ．

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j} - 2\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

これらの方程式は，Lagrange方程式の *Nielsen* の形といわれることがある．

12. １個の質点が，

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = V(r) + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L},$$

の形の一般化ポテンシャルから導かれる力を受けて，空間の中を運動している．ここに，$\mathbf{r}$ は，ある固定点からの動径ベクトル，$\mathbf{L}$ はその点のまわりの角運動量で，$\boldsymbol{\sigma}$ は空間に固定されたベクトルである．

a）（１－58）式を基にして，質点に作用する力の成分を，直交座標および球面極座標の両方に対して見出せ．

b）この２つの座標系における成分は，式（１－49）で与えられるように，互いに関係づけられることを示せ．

c）球面極座標における運動方程式を求めよ．

p.33
13. 質点が力の作用を受けて，一平面内を運動している．力は一定の中心に向い，その大きさは

$$F = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}r}{c^2}\right),$$

で与えられる．ここで r は質点から力の中心までの距離である．このような力を与える一般化ポテンシャルを求め，これから，平面内の運動に対するラグランジアンを求めよ（F に対する式は，Weber の電気力学において，2 つの電荷の間に働く力を表わす）．

14. L を，Lagrange の方程式を満足する，自由度 n の系に対するラグランジアンとするとき，直接代入することによって，

$$L' = L + \frac{dF(q_1, \ldots, q_n, t)}{dt},$$

もまた Lagrange の方程式を満足することを示せ．ここで F は，任意ではあるが，その変数について微分可能な関数である．

15. $q_1, \ldots, q_n$ を，ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ をもつ，自由度 n の系に対する，独立な一般化座標の組とする．これらを，変換方程式，

$$q_i = q_i(s_1, \ldots, s_n, t), \qquad i = 1, \ldots, n$$

によって，他の独立な一般化座標の組 $s_1, \ldots, s_n$ に変換するとしよう（そのような変換は点変換（point transformation）と呼ばれる）．ラグランジアン関数が，変換方程式を通して $s_j, \dot{s}_j$ および t の関数として表現されるならば，そのとき L は s 座標に関する，次のような Lagrange の方程式を満足することを示せ．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0.$$

いいかえれば，Lagrange の方程式の形は，点変換によって不変である．

16. 特定の物理系のラグランジアンが，

$$L' = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{K}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2),$$

の形に書かれている．ここで，a, b および c は，$b^2 - ac \neq 0$ という条件がある以外は任意の定数である．運動方程式はどうなるか？　とくに 2 つの場合，$a = 0 = c$ のときと，$b = 0$，$c = -a$ のときを調べよ．上のラグランジアンで記述されるのは，どのような物理系か？　式（1－56）で定義される，この系に対する普通のラグランジアンは，L' と 1 つの点変換で結びつけられることを示せ（上の演習問題 15 を参照）．$b^2 - ac$ の値

に課せられた条件は，何を意味するか？

17. 球面振子（spherical pendulum），すなわち，重さのない剛体の棒で吊された質点に対するLagrangeの運動方程式を求めよ．

18. 質量mの1個の粒子が，1次元で運動している．そのラグランジアンは，

$$L = \frac{m^2\dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2V(x) - V^2(x),$$

で与えられる．ここに，Vはxのある微分可能な関数である．$x(t)$に対する運動方程式を見出し，この式に基づいてこの系の物理的性質を述べよ．

p.34
19. 質量m_1, m_2の2個の質点が，滑らかなテーブルに開けた孔を通した系の両端に結ばれ，m_1はテーブルの上に静止し，m_2は宙にぶら下っている．m_2が鉛直方向にだけ運動するものと仮定すると，この系に対する一般化座標はどうなるか？ 系に対するLagrangeの方程式を書き，できればそのうちのどれかについて，その物理的な意味を論ぜよ．問題を，ただ1つの2階の微分方程式に帰着させて，その第1積分を求めよ．その物理的意味は何か？（m_1とm_2のどちらも，孔を通過しない間の運動だけを考えよ．）

20. 図1－4で説明した2重振子に対するラグランジアンと，運動方程式を求めよ．ただし，振子の長さをそれぞれl_1，l_2とし，これに対応する質量をm_1, m_2とする．

21. 電磁場は，次に与えるスカラーおよびベクトル・ポテンシャルのゲージ変換（gauge transformation）の下で不変である：

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\psi(\mathbf{r}, \mathbf{t}),$$

$$\phi \to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

ここで，ψは任意関数である（しかし微分可能ではある）．電磁場内を運動する1個の粒子のラグランジアンに対して，このゲージ変換はどのような効果を及ぼすか？ 運動は影響を受けるか？

22. 散逸関数 $\frac{1}{2}kv^2$ から得られる摩擦力が存在するとき，重力の影響の下に，鉛直に落下している粒子に対する運動方程式を求めよ．方程式を積分して，速度を時間の関数として求め，静止の状態から落下するときの最大速度は $v = mg/k$ であることを示せ．

第２章　変分原理とLagrangeの方程式

2－1　Hamilton の原理

p. 35
前章では，系のある瞬間の状態と，この状態からの小さな仮想変位の考察から出発して，Lagrange の方程式を導き出した．つまり，その出発点はD'Alembertの原理のような，“微分原理”(differential principle)であった．しかしLagrange の方程式を得るのに，時刻t_1からt_2の間にわたる系の運動の全体について，系が実際に行う運動と，この運動からの小さな仮想変化を考えに入れた原理によることもできる．このような性質の原理は，“積分原理”(integral principle)として知られている．

積分原理を述べる前に，まず，“時刻t_1からt_2にわたる系の運動”という言葉の意味を，もっと正確に規定しておく必要がある．系の瞬間的な配置は，n個の一般化座標$q_1, \cdots q_n$の値によって記述され，これに対応してq_iをn個の座標軸とする直交座標空間の特定の点が定まる。したがってこのn次元空間は，**配置空間**(*configuration space*)と呼ばれている．時間がたつと，系の状態は変わり，系の配置点(system point)は配置空間の中を動いて，“系の運動の道すじ”と呼ばれる１つの曲線を描く．“系の運動”という言葉が上のように用いられるときには，配置空間の中のこの道すじに沿って行われる系の配置点の運動を指すものとする．時間は，形式的には，この曲線のパラメーターと考えることができ，曲線上の各点に対しては，１つまたはそれ以上の時刻の値が結びつけられる．一般化座標が，必ずしも位置座標とは限らないのと全く同様に，配置空間は，物理的な３次元空間と必然的な関係をもつものでは

ない，ということをはっきりさせておく必要がある．配置空間における運動の道すじは，実際，どの質点の空間的道すじとも決して必然的な類似をもつものでもない．道すじの上の各点はある与えられた瞬間の系の**全体的な**配置を表わすものである．

力学系に作用するすべての力が（拘束力を除いて）1つの一般化されたスカラー・ポテンシャルから導かれる場合には，**Hamilton の積分原理**によってその系の運動を記述することができる．この場合，一般化されたポテンシャルは，座標，速度，および時間の関数であってよい．C. Lanczos の考え出した言葉を借りて，このような系は1元的（monogenic）と呼ぶことにしよう*．ポテ
p. 36 ンシャルが，陽には位置座標だけの関数である場合には，1元的な系はまた保存系でもある（第1－2節参照）．1元的な系に対しては，Hamilton の原理は次の様に述べることができる．すなわち，時刻 t_1 から t_2 までの系の運動は，$L=T-V$ とするとき，線積分

$$I=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{2-1}$$

が，運動の正しい道すじに対して，停留値をとるような運動である**．

すなわち，系の配置点が，時刻 t_1 における位置から t_2 における位置まで移動するときに通ることのできる可能な道すじのうち，実際に通る道すじは，積分(2－1)式が停留値をもつような道すじである．ある線積分が，“停留値”であるというのは，与えられた道すじに沿った積分が，その近傍の（すなわち，その道すじとの差が無限小の変位であるような）すべての道すじに沿った積分と，1次の無限小まででは同じ値をもつ，ということである（図2－1参照）．したがって，線積分が停留値をとるということは，通常の関数論で，1階の導関数が零になるということに対応している．

Hamilton の原理は，要約すると，系の運動は t_1 と t_2 を固定したときの線

---

*) C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, 4th ed.（Toronto : U. of Toronto Press, 1970），p.30.　この言葉は，すべての力が1つの関数から導かれることを示すものである．

) 量 I は作用**（*action*）または**作用積分**（*action integral*）と呼ばれる．

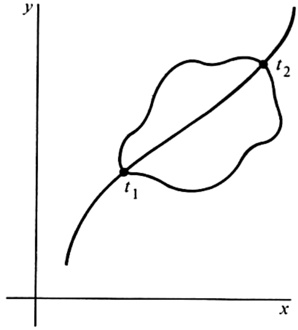


図2－1
配置空間における配置点の道すじ.

積分 I の**変分**（*variation*）が零，すなわち，

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\, dt = 0. \qquad (2-2)$$

であるような運動である，ということができる．

系に対する拘束がホロノミックである場合には，Hamilton の原理（2－2）式は，Lagrange の方程式（1－57）式に対する必要かつ十分な条件である．したがって，Hamilton の原理は，Lagrange の方程式から直接的に導き出されることを示すことができる（Whittaker の *Analytical Dynamics*, 4th ed., p. 245 を参照）．しかしここでは，その代わりに，その逆，すなわち Lagrange の方程式が Hamilton の原理から導かれることを証明しよう．それは，この方がもっと重要な命題だからである． Hamilton の原理が，運動方程式を導くための十分条件であれば， Newton の運動方程式よりもむしろ，Hamilton
p. 37 の原理を基本的な要請として，1元的な系の力学を建設することができる．そのような定式化にはいくらかの利点がある．例えば，積分 I は L を表わすために用いられる，一般化座標のとり方に対して，明らかに不変であるので，一般化座標がどの様に変換されても，運動方程式は常に Lagrange 方程式の形になっている．もっと重要なことは，変分原理を用いた定式化は，場の理論におけるように，明らかに力学的でない系に，古典力学的な衣裳を着せて記述しよう

とする場合には，是非ともたどらなければならない道すじだということである．

2−2　変分法におけるいくつかの手法

Lagrange の方程式が（2−2）式から導かれることを証明する前に，変分法（Calculus of variations）のやり方をまず述べておく必要がある．それは，この算法の主要な問題の1つが，与えられた線積分が停留値をとるような曲線を求めることにあるからである．

最初に，本質的には1次元であるような問題を考えよう．つまり x の2つの値 x_1 および x_2 の間の道すじ $y=y(x)$ の上で定義された関数 $f(y,\dot{y},x)$ を考えよう．ただし $\dot{y}$ は x に関する y の導関数である．x_1 と x_2 の間の関数 f の線積分 J

$$\dot{y}\equiv\frac{dy}{dx},$$

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(y,\dot{y},x)\,dx, \qquad (2-3)$$

が正しい関数 $y(x)$ と無限小だけ違っている道すじに対して停留値をとるような，特定の道すじ $y(x)$ を求めよう．この場合に，変数 x はパラメーター t の役目をするものであるから，$y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2$ であるような道すじの変化だけを考えることにする（図2−2参照）．（図は配置空間におけるものではないこp. 38とに注意しよう．1次元の配置空間では，正しい道すじも変化した道すじも共に y_1 と y_2 とを結ぶ線分であり，それぞれの道すじに対して y と x の間の関数関係が違うだけである．）

関数の停留点を求めるために，よく知られている微分法の手段が使えるような形に，問題を整えることにしよう．正しい道すじは，その**任意の**近傍の道すじに関して，J が停留値となるものであるから，無限小のパラメーター α によって区別される，**ある**特定の近傍の道すじの組に関して，J の変分は零でなければならない．このような道すじの組は，$y(x,0)$ が正しい道すじを表わすことにして，$y(x,\alpha)$ と表わすことができる．例えば，$\eta(x)$ を $x=x_1$ および $x=x_2$ では零になるような任意の関数とするとき，変えられた道すじのうち1組のものを，

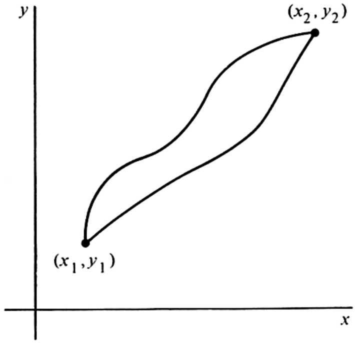


図2－2
1次元の極値問題における変えられた道すじ.

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x) \tag{2－4}$$

のように表わすことができる．簡単のために，正しい道すじ $y(x)$ と補助関数 $\eta(x)$は振舞いのおとなしい関数 —— x_1と x_2の間で連続で，特異点を持たず，その１階および２階の導関数も同じ区間で連続 —— であると仮定しよう．このようなパラメーターによって表わされる曲線群に対しては，式(２－３)の J もまた α の関数になる．すなわち，

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x)\, dx, \tag{2－5}$$

となり，停留値を得るための条件は，よく知られているように，

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0, \tag{2－6}$$

である．積分記号の中で，微分する際に用いられる普通の方法によって，

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\right\} dx. \tag{2－7}$$

となる．この積分の第２項，すなわち，

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \alpha} dx.$$

を考えよう．部分積分を行うと，この積分は，

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \, \partial \alpha} dx = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha}\bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx. \qquad (2-8)$$

となる．曲線の変化に対しては，それらがすべて，２つの点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通るという条件があるので，αに関する y の偏導関数は，x_1および x_2 で零にならなければならない．したがって，式（２－８）の右辺第１項は消えて，（２－７）式は，

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx,$$

p. 39
となる．したがって，停留値であるための条件，式（２－６）は，

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 dx = 0\,, \qquad (2-9)$$

と等価である．ところで（２－９）式の中の α に関する y の偏導関数は，連続性と２つの端点における条件を除けば，x の任意の関数である．例えば，（２－４）式で与えられる変化した道すじを表わすパラメーターで区別される，特別な曲線群の場合には，それは任意関数 $\eta(x)$ である．したがって，（２－９）式に対して，いわゆる変分法の“基本補題”を適用することができる．それによると，もしも２階の導関数まで連続なすべての任意関数 $\eta(x)$ に対して，

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)\,dx = 0 \qquad (2-10)$$

であれば，$M(x)$は区間 (x_1, x_2)において恒等的に零でなければならない．この補題の形式的な数学的証明は，参考文献に挙げられている変分法の教科書にあるが，補題の正しさは，直観的には容易に理解される．考えている区間の中の任意にとられた１点のすぐ近傍では正で，他のすべての所では零となるような関数$\eta(x)$を仮に考えることにしよう．このとき，（２－10）式は$M(x)$がその（任意に）選ばれた点で零となるときにのみ成立しうる．このことは，M が区間全体にわたって零でなければならないことを示している．したがって，（２－９）式と基本補題とから，Jが停留値をとるのは，

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)=0. \tag{2-11}$$

となる場合に限られることが結論される．

微分量，

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha \equiv \delta y \tag{2-12}$$

は，点 x における正しい道すじからの変化した道すじの無限小のずれを表わしており，第１章で導入された，仮想変位に対応する（したがって δy という記号を用いた）．同様にして，J の正しい道すじのまわりの，無限小の変分は，

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_0 d\alpha \equiv \delta J. \tag{2-13}$$

と表わすことができる．上述のことから，正しい道すじに対しては，J が停留値をとるということを，

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right\}\delta y\,dx=0,$$

と書くことができ，したがって $y(x)$ は微分方程式（２－11）を満足しなければならない．（２－12）および（２－13）式で導入された δ-記号は，それが，変化した道すじを（２－４）式のようなパラメーターを用いて表わした曲線群についての処方を表わしているということを思い起こせば，積分の変化を扱うための便利な，簡略法として用いることができる．p. 40

さて，このあたりで（明らかに Lagrange の方程式に似ている）式(2－11)の応用の簡単な例をいくつか考えてみることにしよう．

1.　同一平面内にある２点間の最短距離　平面曲線の線素は，

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

であって，点１と２の間を結ぶ曲線の全長は，

$$I=\int_1^2 ds=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

で与えられる．曲線が最短であるための条件は，I が極小であるということで

ある．これは，（２－３）式で表わされる極値問題の１つの例であって，

$$f=\sqrt{1+\dot{y}^2},$$

である．（２－11）式に，

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}},$$

を代入すると，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right)=0$$

となる．すなわち，

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=c,$$

が得られる．ここで c はある定数である．この解は，

$$\dot{y}=a$$

であるときに限り成立する．a は定数であって，c と次の関係によって結ばれている．

$$a=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}.$$

この解は，明らかに直線の方程式

$$y=ax+b,$$

である．ただし，b はもう１つの積分定数である．厳密にいえば，直線は，単に I が極値をとる道すじであることが証明されただけであるが，この問題に対しては，それは明らかに極小である．積分定数 a および b は，曲線が２つの端点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通るという条件によって決定される．

p. 41
球面上の曲線の長さを，この面上の位置を表わす角座標を用いて表わせば，同じようなやり方で，球面上の２点間の最短距離を求めることができる．一般に，与えられた面上の２点間の最短距離を与えるような曲線は，その面の測地線（*geodesics*）と呼ばれる．

2. 面積極小の回転体面(*surface of revolution*).　2つの固定した端点(x_1, y_1)および(x_2, y_2)の間を結ぶ曲線をとり，それをy軸のまわりに回転して，1つの回転体面を作ったとしよう（図2－3参照）．問題は，この回転体面の

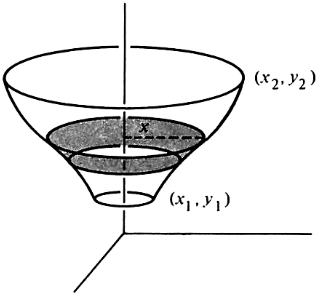


図2－3
表面積極小の回転体面．

表面積が極小になるような曲線を求めることである．この面上にとった細長い帯状の部分の面積は$2\pi x\,ds = 2\pi x\sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx$であるから，全表面積は，

$$2\pi\int_1^2 x\sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx\,,$$

である．この積分の極値は，やはり式（2－11）から得られる．ただし，

$$f = x\sqrt{1+\dot{y}^2}\,,$$

で，したがって，

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}.$$

である．（2－11）式は，この場合には，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right) = 0$$

すなわち，

$$\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = a,$$

となる．ただし a はある積分定数であって，x の極小値よりも明らかに小さい．上の式を２乗して因数分解すると，

$$\dot{y}^2(x^2 - a^2) = a^2 \quad ,$$

p. 42
あるいは，これを解いて，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad ,$$

が得られる．この微分方程式の一般解は，a の性質から考えて，

$$y = a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = a \operatorname{arc\,cosh} \frac{x}{a} + b \quad ,$$

すなわち，

$$x = a \cosh \frac{y - b}{a},$$

である．これは懸垂線（catenary）の方程式である．この場合にも，２つの積分定数 a，b は，原理的には，曲線が２つの与えられた端点を通るという条件から決められる．しかしながら，詳しく調べると，解の性質は，これまでの考察から予想されるよりも，ずっと複雑であるということを指摘しておく必要がある．すなわち，端点のある１組に対しては，積分定数 a および b の値が一意的に定まる．しかし他の端点の組に対しては懸垂線を表わす２つの解が出てくる場合や，a および b の値が求められないような場合もある．さらに，（２－11）式は２階の導関数まで連続で，積分が停留値になっているような曲線 $y(x)$ を求めるための条件であったことを思い出さなければならない．したがって懸垂線は，必ずしも極小値を表わしているとは限らず，“変曲点”を与えているのかも知れない．端点のある組み合わせに対しては，回転体面の表面積が最小となる曲線が，線分から成っていることがある．すなわち，第１の端点から x 軸に平行に y 軸にまで達し，次に y 軸上を $(0, y_2)$ まで行き，最後にそこから第２の端点にまっすぐに行くような道である．そのような曲線は１階の導関数が不連続になるので，（２－11）式の解としては求められない．この例は，停留値をとるための条件の導出の仕方，およびその意味に関して，制限がある

ということを強調するのに役立っている．もっと詳しいことは，いくつかの演習問題に取り上げられ，また，参考文献として挙げられている変分学の教科書にでている．

3.　最速降下線（*brachistochrone*）の問題　これは，高さのちがう2点間を，最初に高い方の点で静止していた質点が，重力の作用の下で，低い方の点に向って移動する場合に，最も短い時間で到達することのできるような曲線を求めるという有名な問題である．

質点が曲線に沿って動く速さを v とすると，長さ ds を落ちて行くのに要する時間は ds/v である．そうすると，問題は，積分，

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}.$$

の極小値を求めることになる．y を最初に放した点から鉛直下向きに測ると，質点のエネルギーの保存則は，

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgy \ ,$$

あるいは，

$$v = \sqrt{2gy} \ ,$$

p. 43
と書くことができる．そうすると t_{12} に対する式は

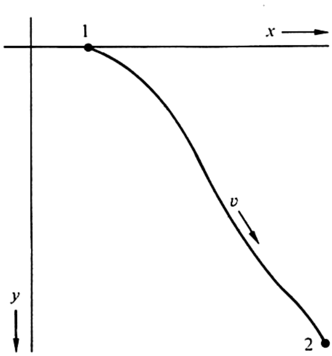


図2－4
最速降下線の問題．

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx,$$

となり，fは，

$$f = \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{2gy}}\quad,$$

であることがわかる．fがこの形のときに，（2－11）式を積分することは簡単であるから，この章の1つの演習問題として残しておこう．最速降下線の問題は数学の歴史において有名なものである．というのは，John Bernoulli が変分法の形式的な基礎づけに導かれたのはこの問題の解析によってであったからである．

2－3　Hamilton の原理からの Lagrange の方程式の導出

変分法の基本的な問題は，fが多くの独立変数y_iおよびその導関数$\dot{y}_i$の関数である場合へ容易に一般化される（もちろん，これらの量はパラメーター的な変数xの関数と考えている）．その時には，積分Jの変分，

$$\delta J = \delta \int_1^2 f(y_1(x); y_2(x), \ldots, \dot{y}_1(x); \dot{y}_2(x), \ldots, x)\,dx, \qquad (2-14)$$

p.44
は，前と同じように，Jを1組の可能な曲線群$y_i(x,\alpha)$を区別する1つのパラメーターαの関数と考えることによって得られる．すなわち，

$$\begin{aligned} y_1(x,\alpha) &= y_1(x,0) + \alpha\eta_1(x), \\ y_2(x,\alpha) &= y_2(x,0) + \alpha\eta_2(x), \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned} \qquad (2-15)$$

とおくことによってαを導入することができる．ここで，$y_1(x,0)$, $y_2(x,0)$などは（求めている）極値問題の解であって，η_1, η_2 などは両端の点で零であること，および2階の導関数まで連続であること，以外はまったく任意なxの関数である．計算は前節と同じように行われる．Jの変分は，

$$\frac{dJ}{d\alpha}d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha}d\alpha \right) dx. \qquad (2-16)$$

で与えられる．ここでもまた，（2－16）式は第2項の和の積分に対して部分積分を行うと，

$$\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha\, \partial x}dx = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right) dx,$$

となる．この式の右辺の第1項は，すべての曲線が固定した端点を通るために零になる．これを（2－16）式に代入すれば，δJは，

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i \, dx, \qquad (2-17)$$

となる．ここで変分δy_iは式（2－12）と同じように，

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha.$$

である．変数y_iは互いに独立であるから，変分δy_iも独立である（例えば，関数$\eta_i(x)$は互いに独立である）．したがって，基本補題（上の式（2－10）を参照）をこの場合に拡張すると，δJが零になるという条件は，δy_iの係数が別々に零になること，すなわち，

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2-18)$$

となることであることがわかる．（2－18）式は，（2－11）式を多くの変数を含む場合に一般化したものであって，*Euler-Lagrange* **の微分方程式**として知られている．その解は（2－14）式に与えられている形の積分の変分が零になるような曲線を表わす．この基本的な変分の問題を，さらに一般化することは，容易にできる．すなわちfを，高階の導関数$\ddot{y}$, $\dddot{y}$などの関数にとることもできる．この場合には，（2－18）式とは違った微分方程式が得られる．あ
p. 45
るいはまた，いくつかのパラメーターx_jがある場合に拡張することもできる．そうすると，積分は多重積分になり，fもパラメーターx_jのおのおのに関するy_iの偏導関数を変数として含むことになる．最後に，両端の点が固定されてい

ないような変分を考えることも可能である．

当面の目的に対しては，ここで述べたことだけで十分である．なぜなら，Hamilton の原理における積分，

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt \ , \qquad (2-19)$$

は，次のような変換，

$$x \to t$$

$$y_i \to q_i$$

$$f(y_i, \dot{y}_i, x) \to L(q_i, \dot{q}_i, t),$$

によって，ちょうど（2－14）式に示した形になるからである．（2－18）式を導出する際に，変数 y_iが独立であるということが仮定された．Hamilton の原理の場合に，これに対応する条件は，一般化座標 q_iが独立であるということである．したがって，拘束はホロノミックでなければならない．その場合には，積分 I に対応した Euler-Lagrangeの方程式は，Lagrange の運動方程式，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

となる．これで，ホロノミックな拘束を持つ1元的な系に対しては，Lagrange の方程式が，Hamilton の原理から導かれることを示す，というわれわれの最初の目的は達せられた．

2－4　非ホロノミック系に対する Hamilton の原理の拡張

Hamilton の原理は，少なくとも形式的には，ある種の非ホロノミック系に拡張することができる．Lagrange の方程式を，Hamilton の原理またはD'Alembertの原理から導く際には，いずれの場合にも，拘束がホロノミックであるということは，最後に q_i の変分が独立であることが要求されるまでは，必要ではない．非ホロノミック系の場合には，一般化座標は互いに独立ではなく，また $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0$ という形の拘束の式を用いて，独立なものだけを取り出すこともできない．したがってもはやすべての q_iが独立であるとすることは

できない．

変分原理を扱う際に考慮されるべきもう１つの違いは，変化した道すじの作り方である．第２－２節の議論においては，δy（または δq）は実際の道すじの上の１点から，その近傍にある変化した道すじの上の１点への仮想変位を表わしていた．しかし，独立な座標の場合には，意味があるのは変化した最後の道すじであって，その道すじの作り方ではない．座標が独立でなく，拘束があ
p. 46
る場合には，変化した道すじが，拘束と矛盾しない変位によって作られたかどうかが重要になる．特に，仮想変位は拘束を満足するかも知れないし，しないかも知れない．

非ホロノミックな系を，変分原理によって合理的に見通しよく扱える場合は，拘束を表わす式が次の形，

$$\sum_k a_{lk}\,dq_k + a_{lt}\,dt = 0, \qquad (2-20)$$

すなわち，q の微分（*differentials*）の間の線型な関係式として書ける場合に限られるように思われる．上式で指標 l は，このような方程式が１つよりも多くあるかも知れないということを示している．以下では全部で m 個の方程式があること，すなわち，$l = 1, 2, \ldots, m$ であると仮定しよう．係数 a_{lk} および a_{lt} は q および時間の関数であることに注意する必要がある．

変化した道すじ，またはそれと等価であるが，変化した道すじを作っている変位は，（２－20）式を満足しているべきであると予想されるかも知れない．しかし（２－20）式が積分可能な場合でなければ，そのような道すじは存在しないことが証明されている*．その場合には実は拘束はホロノミックである．それにもかかわらず，変化した道すじが実際の運動から仮想変位によって作られるときには，変分原理によって正しい運動方程式を導くことができる．そのときには，仮想変位に対しては，拘束の式，

$$\sum_k a_{lk}\,\delta q_k = 0, \qquad (2-21)$$

---

*）例えば，H. Rund, *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations* (New York : Van Nostrand, 1966）第５章を見よ．

が成立し，変化した道すじは，一般には（２－20）式を満足しなくなるであろう．

さて，（２－21）式を利用すれば，仮想変位の数を減らして，たがいに独立なものばかりにすることができる．これら余分の仮想変位を消去する方法が，*Lagrange* の**未定乗数法**（method of Lagrange undetermined multipliers）である．もし（２－21）式が成立するならば，

$$\lambda_l \sum_k a_{lk}\,\delta q_k = 0, \tag{2-22}$$

も成立する．ただし，λ_l, $l = 1, 2, \ldots, m$ はある未定の量で，一般には座標および時間の関数である．さらに，Hamilton の原理，

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0, \tag{2-2}$$

が，非ホロノミックな系に対しても成立すると仮定する．そうすると，第２－３節で述べたことから，Hamilton の原理は次のことを意味する．

$$\int_1^2 dt \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k = 0. \tag{2-23}$$

p. 47（２－23）式を仮想変位 δq_k についての m 個の拘束の式と結びつけることができるが，そのために，まず（２－22）式で l についての和をとり，その和を点１から点２まで時間に関して積分すると，

$$\int_1^2 \sum_{k,l} \lambda_l a_{lk}\,\delta q_k\,dt = 0, \tag{2-24}$$

となる．式（２－23）と（２－24）の和をとると，次のような関係式，

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0, \tag{2-25}$$

が得られる．δq_k はもちろんまだ独立ではなく，m 個の関係式（２－21）によって，互いに関連している．すなわち，n 個の δq_k のうち，最初の $n-m$ 個は独立に選ぶことができるが，そうすると残りの m 個は（２－21）式によって決ってしまう．しかし，λ_l の値は自由に選ぶことができる．そこで λ_l を，

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0, \qquad k = n-m+1, \ldots, n. \tag{2-26}$$

を満たすように選んだとしよう．これらの式は，後の m 個の変数 q_k に対する運動方程式の性質をもっている．λ_l を式（2－26）によって決めたとすると，式（2－25）は，

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0\,, \qquad (2-27)$$

と書くことができる．この式の中に含まれている δq_k はすべて，互いに独立なものばかりである．したがって，

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n - m. \qquad (2-28)$$

が成立しなければならない．式（2－26）と（2－27）を一緒にすると，非ホロノミック系に対する Lagrange の方程式の完全な組として，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2-29)$$

が得られる．しかし，これで話が済んだわけではない．なぜなら，われわれは，いまでは $n+m$ 個の未知数，すなわち n 個の座標 q_k と m 個の未定乗数 λ_l を処理しなければならないのに，式（2－29）は全部で n 個の方程式を与えるにすぎないからである．これに付け加えなければならない付加方程式は，もちろん，q_k の間の関係を与える拘束の方程式（2－20）である．ただし，ここではそれらを1階の微分方程式と考えて，

$$\sum_k a_{lk}\dot{q}_k + a_{lt} = 0. \qquad (2-30)$$

と書かなければならない．（2－30）式と（2－29）式を合わせると，$n+m$ 個の未知数に対する $n+m$ 個の方程式の組ができ上ることになる．

この過程の中で，われわれは最初に求めていた以上の知識を得ることができた．すなわち，最初に求めようとして出発した q_k が得られたばかりでなく，
p. 48
m 個の λ_l も求めることができたからである．λ_l の物理的な意味は何であろうか？系に対する拘束を取り除き，そのかわりに，系の運動が変わらないように，外力 Q'_k を加えたと仮定しよう．そのようにしても運動方程式は変わらないはずである．この余分に加えた力は，拘束の条件を満たすように系に加えた力であ

るから，拘束の力に等しくなければならないことは明らかである．この力 Q'_k の下では，運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=Q'_k \qquad (2-31)$$

である．ところが，これは（2－29）式と同じでなければならない．したがって $\Sigma\lambda_l a_{lk}$ は一般化拘束力（generalized force of constraint）Q_kと同じであると考えることができる．このような形式の問題では，拘束力は実際表式の中から消去されずに，答の一部として与えられるのである．

はっきりとは述べられていなかったけれども，ここで用いられた，非ホロノミックな系に対する Hamilton の原理には，拘束力は仮想変位の際に仕事をしないという要請も含まれていたのである．このことを見るには，Hamilton の原理を，

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt=\delta\int_{t_1}^{t_2} T\,dt-\delta\int_{t_1}^{t_2} U\,dt=0\,,$$

という形に書き直してみるとよい．第2－3節の手続きによって，一般化ポテンシャルの積分について変分を行うと，Hamilton の原理は，

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T\,dt=-\int_{t_1}^{t_2}\sum_k Q_k\,\delta q_k\,dt\,,$$

あるいは，（1－58）式を用いると，

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_k\left(\frac{\partial U}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right)\right)\delta q_k\,dt\,, \qquad (2-32)$$

という形に書ける．この形に書いた Hamilton の原理が述べていることは，運動エネルギーの時間についての積分の，隣り合った道すじの間の違いは，2つの道すじの間の仮想変位の際になされた仕事の，時間についての積分の符号を逆にしたものに等しい，ということである．この仕事には，一般化ポテンシャルから導かれる力によってなされるものだけが含まれている．もしホロノミック系および非ホロノミック系のどちらの場合に対しても，同じ Hamiltonの原理をとるならば，非ホロノミックな拘束を表わす余分な力は，仮想変位 δq_k の際に仕事をしないということを要請しなければならない．この制限は，ホロ

ノミックな拘束力による仮想仕事が零になるという前述の条件（第1－4節参照）と平行するものである．実際には，この制限は殆ど障害にはならない．なぜなら，非ホロノミック系に対する定式化が用いられる殆ど大部分の問題は，拘束力が仕事をしないことが明らかな，すべらないころがりに関するものだからである．

実際，もしも拘束力が仕事をしないということを，最初から仮定すれば，(2－31)式を導く際に用いた物理的論法を拡張して，非ホロノミック系に対する Lagrange の方程式の完全な組，（2－29）式を直ちに導くことができる．拘
p. 49
束力による仮想仕事が零であるという条件は，

$$\sum_k Q'_k \delta q_k = 0, \qquad (2-33)$$

と書くことができる．また，拘束を表わす式は，

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, m \qquad (2-21)$$

である．したがって（2－33）式は，もし拘束力が，

$$Q'_k = \sum_l \lambda_l a_{lk},$$

によって与えられるならば，満たされる．ただし λ_l は未定の乗数である．残りの議論は，上述の（2－28）式以後に与えられた議論の線にしたがって行えばよい*．

（2－20）式は，非ホロノミックな拘束の最も一般的な形式ではないことに注意しよう．例えば，不等式の形の拘束の式はこの中に含まれていない．ところが他方，ホロノミックな拘束はこの中に含まれている．ホロノミックな拘束を表わす式，

$$f(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, t) = 0 \qquad (2-34)$$

は，微分方程式

---

*）非ホロノミック系に対して，変分原理を定式化する際のいろいろな困難さや，それに比べて運動方程式を直接得ることは容易であることを考えてみると，非ホロノミック系の場合には変分原理の有用性に疑問を持つことは自然である．こういうわけで，変分原理およびその結果についての議論は，今後は一般化座標が独立であるホロノミック系の場合に限ることにする．

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0, \tag{2-35}$$

と同等であって，この形にすると，係数を，

$$a_{lk} = \frac{\partial f}{\partial q_k}, \qquad a_{lt} = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{2-36}$$

とおけば，（２－20）式と同じになる．したがって，ホロノミックな拘束の場合でも，(1) q の数を減らして独立な座標のみにするのが都合がわるい場合，あるいは，(2)拘束の力を求めたい場合には，Lagrange の乗数法を用いることができる．

この方法の１例として，次のようなやや平凡な問題 —— 斜面上を滑らずにころがりながら落ちる輪の問題 —— を考えてみよう．この例題では，“ころがり”を強制する拘束は，実際はホロノミックであるが，この事実は以下の議論では重要でない．他方，輪が斜面上にあるというホロノミックな拘束は，一般化座標の選び方の中に暗に含ませることができる．

p.50
２つの一般化座標は，図２－５に示してあるように，x と θ で，ころがりの拘束の式は，

$$r\,d\theta = dx,$$

である．

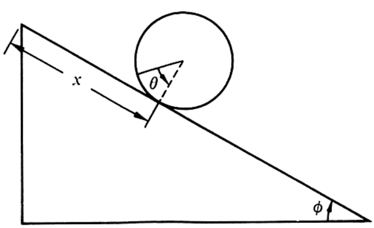


図２－５
斜面上をころがり落ちる輪．

運動エネルギーは，質量中心の運動エネルギーと，質量中心のまわりの回転運動のエネルギーの和に分解できる．すなわち，

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2,$$

である．位置エネルギーは，

$$V = Mg(l-x)\sin\phi,$$

である．ただし l は斜面の長さである．したがってラグランジアンは，

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{Mr^2\dot{\theta}^2}{2} - Mg(l-x)\sin\phi, \end{aligned}$$

で与えられる．拘束の式は1つであるから，ただ1つの Lagrange の乗数 λ が必要なだけである．拘束の式の中に現われる係数は，

$$a_\theta = r, \qquad a_x = -1,$$

である．したがって2つの Lagrange 方程式は，

$$M\ddot{x} - Mg\sin\phi + \lambda = 0, \tag{2-37}$$

$$Mr^2\ddot{\theta} - \lambda r = 0, \tag{2-38}$$

となる．これは拘束の式，

$$r\dot{\theta} = \dot{x}, \tag{2-39}$$

と合わせて，3個の未知数 θ, x, λ に対する3個の方程式を形づくる．

（2－39）式を時間について微分すると，

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x}$$

が得られる．したがって（2－38）式は，

$$M\ddot{x} = \lambda,$$

p. 51
となり，（2－37）式は，

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\phi}{2},$$

となる．これから，

$$\lambda = \frac{Mg\sin\phi}{2} \quad ,$$

および，

$$\ddot{\theta} = \frac{g\sin\phi}{2r} \quad ,$$

が得られる．したがって輪は摩擦のない斜面を滑り落ちる場合のわずか半分の加速度で斜面をころがり落ちていく．そして拘束の摩擦力は，$\lambda = Mg\sin\phi/2$ である．

$$\ddot{x} = v\frac{dv}{ds},$$

から，斜面の下の端では $v = \sqrt{gl\sin\phi}$ が得られる．この関係は，もちろん初等的な方法でも求めることができる．

2－5　変分原理による定式化の利点

このように，Hamilton の原理の最初の形式（2－2）を，非ホロノミックな拘束を含むように拡張することができるけれども，実際にはこの形式は，系に対して独立な座標の関数としてラグランジアンを作ることができる場合に最も有用である．変分原理による定式化が“エレガントである”といわれてきたのは，その簡潔な Hamilton の原理の中に，ポテンシャルから導かれる力が作用している，ホロノミックな系の力学のすべてが含まれていることから考えて当然のことである．この原理は，さらに，特定の一般化座標とは無関係に定義できる物理量，すなわち運動エネルギーと位置エネルギーのみを含んでいるという長所をもっている．したがってこの形式は，系に対する座標の選び方に関して自動的に不変になっている．

また，Hamilton の変分原理から，第1－4節の終りに述べたように，ラグランジアンには常に座標および時間の任意の関数の，時間についての全導関数だけの不定性がある，ということの理由が明らかになる．そのような全導関数の，点1から点2までの時間についての積分は，その任意関数の両端の点における値にのみ依存する．ところが，端点における変分は零であるから，ラグランジ

アンに，任意の時間に関する導関数を付け加えても，積分を変分するときには影響がない．

もう1つ都合のよいことは，ラグランジアン形式は，力学では通常考慮に入p. 52 れられないような系，例えば，弾性力の場，電磁場，素粒子の場としての性質，などを記述することができるように，容易に拡張することができるということである．このような一般化のいくつかは後に考察するが，力学の普通の枠の外にある応用の簡単な例として，次のような場合を考えてみよう．

ラグランジアン，

$$L=\frac{1}{2}\sum_{j} L_j \dot{q}_j^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{jk\\ j\neq k}} M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k-\sum_{j}\frac{q_j^2}{2C_j}+\sum_{j}E_j(t)q_j \qquad (2-40)$$

および散逸関数，

$$\mathscr{F}=\frac{1}{2}\sum_{j} R_j\dot{q}_j^2 \qquad (2-41)$$

をもつ系があるとしよう． Lagrange の方程式は，

$$L_j\frac{d^2q_j}{dt^2}+\sum_{\substack{k\\ j\neq k}} M_{jk}\frac{d^2q_k}{dt^2}+R_j\frac{dq_j}{dt}+\frac{q_j}{C_j}=E_j(t), \qquad (2-42)$$

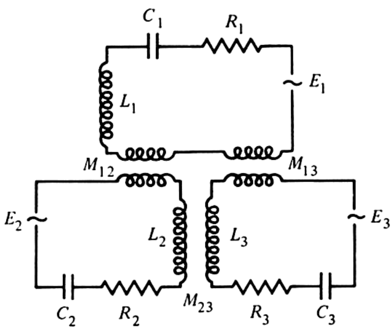
である．これらの運動方程式は，少なくとも2通りに解釈することができる． q_jを電荷，L_jを自己インダクタンス，M_{jk}を相互インダクタンス，R_jを抵抗，C_jを容量，E_jを外部起電力と考えれば，(2－42)式は相互インダクタンスで結合された回路網からできている系を記述する1組の方程式となる．例えば，$j=1,2,3$ に対しては，図2－6のような3つの回路網になるであろう．また，他方から見ると，Lの中の最初の2項は，一般化速度に関する任意の同次2次形式を作っている．系の(ホロノミックな)拘束が時間に無関係なときには，運動エネルギーTはそのような形に表わすことができる(第1－6節参照)．その場合には，係数L_j，M_{jk}は質量の性質を一部もっている．つまりこれらは“**慣性項**”(*inertial term*)である． ラグランジアンの中の第3項は，ちょうど Hooke の法則，

$$F=-kx,$$

p. 53
にしたがい，そのポテンシャルが

$$V=\frac{kx^2}{2},$$

であるような1組のばね，すなわち調和振動子（harmonic oscillator）の位置エネルギーに相当する．したがって$1/C_j$は，ばねの定数を表わす．Lの最後の



p. 52
図2－6
ラグランジアン形式の適用できる結合回路系.

項は（例えば重力のように），座標に無関係な駆動力(driving force）$E_j=Q_j$によるポテンシャルに相当する．ただし，E_jという力は時間と共に変わってもよいという点では重力の場合よりも広い．最後に散逸関数は，一般化速度に比例する散逸力または粘性力が存在することに相当する．このようにして，方程式（2－40）と（2－41），あるいは（2－42）の別の解釈に到達する．この解釈によれば，ばねに結びつけられた質点の複雑な系が，粘性流体の中を運動し，外力のために押し動かされている描像が浮かぶ．

このように，2つの異なる物理系が，同じ形のラグランジアンで記述できるということは，1つの系を研究するために工夫された技巧とその結果が，すべてそのまま直ちに他の系に適用できることを意味する．上に述べた特別の場合についていえば，電気回路の動作は，非常によく研究されており，特殊な技法が進んでいるから，これに相当する力学系に直ちに適用することができる．力

学的あるいは音響学的な系に対して，これに等価な電気的な問題を定式化すること，およびその逆について，たくさんの仕事がなされている．通常は電気回路に対してのみ用いられる用語（リアクタンス（reactance），サセプタンス（susceptance）等）が，力学系の振動の理論でしばしば表現の様式として一般に採用されている*．

しかし，力学の一般化の形式には，このほかに，もっと微妙な等価性に基づくものがある．すでに見てきたように，ラグランジアンと Hamiltonの原理が結びついていて，力学の運動方程式を，簡潔で不変な仕方で含む形式を作っている．この可能性は，力学だけに限られるものではない．変分原理は，物理学の殆どすべての分野において，"運動方程式"（equation of motion）を表わすために用いることができるのである． Newton の方程式であろうと，Maxwell の方程式であろうと，あるいは Schrödinger の方程式であろうと，同じである．したがって，変分原理が定式化の基礎として用いられる場合には，そのような分野はすべて，少なくともある程度までは，**構造上の類似**（*structural analogy*）を示す． 実験の結果が，ある分野の理論において，物理的内容の変更の必要性を示す場合には，この類似の程度が，しばしば他の分野においても，同じような変更がどのように行われるべきかを示してきた．このようにして，今世紀の初めに行われた実験によって，電磁放射および素粒子の両方に対して量子化（quantization）の必要なことが示されたのである[1]． しかし量子化の方法は，最初，粒子の力学に対して，本質的には古典力学のラグランジアンから出発して発展させられた．電磁場に対しては，それをラグランジアンとこれに対応する Hamilton の変分原理によって記述することによって，粒子に対する量子化の方法をとり入れ，量子電磁力学を構成することができるの

---

*）詳しい説明については，H. F. Olson, *Solutions of Engineering Problems by Dynamic Analogues*（New York : Van Nostrand, 1966）を見よ．

1）Planck の熱放射の法則（1900）をはじめ，光電効果， Compton 効果などの発見によって，電磁放射の不連続性が明らかにされると共に，他方 Frank-Hertz の実験（1913）や Stern-Gerlach の実験（1922）などによって，原子内における電子の運動についても，エネルギーや角運動量などが，不連続的な値をとることが確かめられた．古典理論における連続的な量を，これらの不連続的な量で置き換えること，ならびにこれらの不連続的な量に対応して，他のすべての量に適当な制限をおくことが量子化にほかならない．詳しい点については原子物理学の教科書を参照せよ．

である（第12－5節および第12－6節参照）．

p. 54

2－6　保存則と対称性

いままでは，主として運動方程式を得ることに関心を持ち，特殊な問題に対して，それをどのようにして解くかについてはあまり述べなかった．これは，大体において数学の問題である．自由度が n の系に対しては，時間について 2 階の n 個の微分方程式が得られる．この各々を解くためには 2 回の積分が必要であるから，合計 $2n$ 個の積分定数があらわれる．特定の問題については，これらの定数は，初期条件，すなわち n 個の q_j および n 個の $\dot{q}_j$ の初期値によって定められるであろう．ときには，運動方程式が既知の関数を用いて積分できる場合もあるが，いつでもそうであるとは限らない．実際には，多くの問題は，完全には積分ができないようなものである．しかし，完全な解が得られない場合でも，系の運動の物理的性質について，かなりの知識を引き出すことができる場合がしばしばある．実際，そのような知識は，物理学者にとっては，一般化座標を時間の関数として完全に知ることよりも，一層興味があるかも知れない．したがって与えられた系の運動について，問題を完全に積分することなしに，どれだけのことがいえるかということを確かめておくことは重要なことである*．

多くの問題において，運動方程式の第 1 積分（first integral）のいくつかは，直ちに得ることができる．これは，1 階の微分方程式，

$$f(q_1, q_2, \ldots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, t) = \text{定数} \qquad (2-43)$$

の形の関係が得られることを意味する．これらの第 1 積分は，系について，何かをわれわれに教えてくれるために興味がある．実際，それらの中には，第 1 章で得られたいろいろの保存則が含まれているのである．

1 つの例として，位置座標のみに依存するポテンシャルから導かれる力の作用を受けている質点系を考えよう．この場合には，

---

*）この節および以下の節では，別に断わらなければ，系はその運動が（2－2）式の形の Hamilton の原理によって完全に記述されるようなものであると仮定する．

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\sum \frac{1}{2}m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$
$$= m_i\dot{x}_i = p_{ix},$$

であって，これは i 番目の粒子の線運動量の x 成分になる．この結果は，運動量の概念の１つの明らかな拡張を暗示している．すなわち，座標 q_j に対応する一般化運動量 (generalized momentum) は，

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \tag{2-44}$$

によって定義される．この p_j に対して**正準運動量** (*canonical momentum*)，あるいは**共役運動量** (*conjugate momentum*)という用語もしばしば用いられる．q_j が直交座標でなければ，p_j は必ずしも線運動量のディメンションを持たないことに注意しよう．さらに，速度に依存するポテンシャルがある場合には，p. 55 直交座標 q_j についても，対応する**一般化運動量**は，普通の**力学的運動量**と同じではない．すなわち，電磁場の中の質点系の場合には，ラグランジアンは (q_j を電荷として) ((1－66) 式参照)，

$$L = \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^2 - \sum_i q_i\phi(x_i) + \sum_i \frac{q_i}{c}\mathbf{A}(x_i)\cdot\dot{\mathbf{r}}_i ,$$

で， x_i に共役な一般化運動量は，

$$p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i\dot{x}_i + \frac{q_i A_x}{c}, \tag{2-45}$$

すなわち，力学的運動量と付加項との和になる．

もし，系のラグランジアンが，ある座標 q_j を含まないときには (これに対応する速度 $\dot{q}_j$ は含んでいてもよい)，この座標は**サイクリック** (*cyclic*) あるいは**イグノラブル** (*ignorable*) であるといわれる． この定義は普遍的なものではないけれども*，習慣的に使われているものであるから，ここでもそれに従う

*) この2つの用語は，普通どちらを用いてもよく，上に与えたような意味をもつものと考えられている．しかし，著者によっては，運動エネルギー T の中に現われないものをサイクリックな座標，ラグランジアンの中に現われないものをイグノラブルな座標と定義して，両者を区別する人もある．

ことにする．Lagrange の方程式は，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0,$$

は，サイクリックな座標に対しては，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=0\ ,$$

すなわち，

$$\frac{dp_j}{dt}=0,$$

となる．この式は，

$$p_j=\text{定数} \qquad (2-46)$$

を意味する．したがって，一般的な法則として，**サイクリックな座標に共役な一般化運動量は保存される**，ということができる．

（2－46）式は，運動方程式に対する式（2－43）の第1積分になっている．この式は，問題の中から，サイクリックな座標を消去するのに，形式上使うことができる．そうすると，残りの一般化座標だけを用いて，問題を解くことができることになる．その方法は，Routh によって始められたものであるが，p. 56 簡単にいうと，ラグランジアンを変形して，それがもはやサイクリックな座標に対応する一般化速度の関数ではなくて，その代わりにそれに共役な一般化運動量のみ含むようにすることである．このようにすると，p_jを積分定数の1つと考えることができ，したがって，残りの積分がサイクリックでない座標だけを含むことになる，という利点がある．Routh の方法の詳細な議論は，ハミルトニアン形式（Routh の方法は，これと全くよく似ている）を取り扱うときま

（前頁より）（Webster, *The Dynamics of Particles*，および Byerly, *Generalized Coordinates* 参照）．Ames と Murnaghan（*Theoretical Mechanics*）は，この2つの用語は取り換え得るものとして使っているが，明らかに T に含まれない座標を意味するものと限定している． Lanczos（*Variational Principles of Mechanics*）は古い用語“キノスセニック”(kinosthenic)を，サイクリックあるいはイグノラブルの同義語として復活させた．さらに“サイクリック”は，周期的変数との関連で，違った意味に用いられることもある（本書の第9－5節，および Synge, *Encyclopedia of Physics*, Vol. 3/1, p. 102参照）．

で延ばしておくことにしよう．

一般化運動量に対する保存の条件は，前に導き出した2つの運動量保存則[1)]よりも，さらに一般的であることに注意しよう．例えば，これによると，作用と反作用の法則が成立しないとき，すなわち，電磁力の存在する場合に対しても，保存則が得られる．ϕも$\mathbf{A}$も，どちらも座標xに無関係な場の中に，ただ1つの質点があると仮定しよう．そうすると，xはLの中のどこにも現われないから，サイクリックである．したがって，これに対応する正準運動量p_xは保存されなければならない．（1－66）式によると，この運動量は，いまの場合には，

$$p_x = m\dot{x} + \frac{qA_x}{c} = \text{定数} \qquad (2-47)$$

の形になる．この場合には，保存されるのは力学的運動量 $m\dot{x}$ ではなく，これと qA_x/c との和である*．それにもかかわらず，第1章で述べた保存則が，サイクリックな座標に対する一般法則に含まれていることに変わりはない．適当な条件を付け加えれば，式（2－46）は第1－2節の法則に帰着されるのである．

まず，一般化座標q_jを考え，その変化 dq_j がある与えられた方向への系全体の並進を表わすとしよう．そのような座標の例として，系の質量中心の直交座標の1つをとることができる．その場合には，明らかにq_jはTの中に現われない．なぜなら，速度は原点の移動によって影響されず，したがってTのq_jについての偏導関数は零でなければならない．さらに，電磁力のような異例なものを考慮しなくてもよいように，Vが速度に依存しない，保存系をとることにしよう．そうすると，上のように定義された座標に対する運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \equiv \dot{p}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j \qquad (2-48)$$

となる．さて，（2－48）式は，全線運動量に対する運動方程式であること，

1）第1－2節で述べた線運動量の保存則および角運動量の保存則．

*）このような条件，すなわち座標xに依存しない$\mathbf{A}$とϕの下では，qA_x/cが，ちょうど電荷qの作る場の電磁的線運動量のx成分になることは，古典電気力学から証明することができる．

すなわち，Q_j は q_j の方向（並進方向）の合力の成分を表わし，　p_j はこの方向の全線運動量の成分であることを示そう．一般に，一般化力 Q_j は（1－49）式から，

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \ ,$$

p. 57
で与えられる．dq_j は，ある軸に沿う系の並進に対応しているから，ベクトル $\mathbf{r}_i(q_j)$ と $\mathbf{r}_i(q_j + dq_j)$ とは，図2－7に示すような関係にある．導関数の定義によれば，

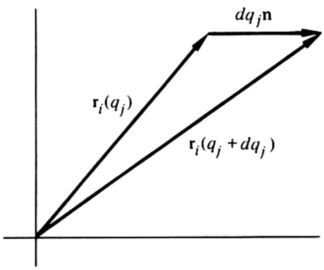


図2－7
系の並進の際の位置ベクトルの変化．

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \mathop{\mathrm{L}}_{dq_j \to 0} \frac{\mathbf{r}_i(q_j + dq_j) - \mathbf{r}_i(q_j)}{dq_j} = \frac{dq_j}{dq_j}\,\mathbf{n} = \mathbf{n}, \qquad (2-49)$$

である．ここで $\mathbf{n}$ は並進方向の単位ベクトルである．したがって，

$$Q_j = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F},$$

となり，　Q_j は，前に述べたように，　$\mathbf{n}$ 方向の合力の成分になる．　残りの半分を証明するために，運動エネルギーが，

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

の形の場合には，共役運動量が，（1－51）式を用いると，

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j},$$
$$= \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

となることに注意しよう．そうすると（2－49）式から，

$$p_j = \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i,$$

となって，p_jはやはり前に述べたように，$\mathbf{n}$方向の系の全線運動量の成分になる．

ここで，いままで論じてきた並進座標 q_jがサイクリックであると仮定しよう．そうすると，q_jはVの中に現われないはずだから，

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j = 0.$$

p. 58
である．ところが，これはちょうど，加えられた力の合力の与えられた方向の成分が零になれば，対応する全線運動量の成分が保存される，という線運動量に対するよく知られた保存則である．

同じようなやり方で，もしサイクリックな座標 q_jの変化 dq_j が，ある軸のまわりの系の回転に相当するならば，これに共役な運動量の保存が，角運動量の保存に相当することを示すことができる．上に用いたのと同じ論法で，Tがq_jを含むことはあり得ない．なぜなら，座標系の回転が，速度の大きさに影響することはあり得ないからである．したがってq_jについてのTの偏導関数は，やはり零でなければならない．また，Vは$\dot{q}_j$に無関係であるから，やはり（2－48）式が得られる．しかし，ここで証明したいことは，回転座標 q_jの 場合には，一般化力は，加えた全トルクの回転軸方向の成分であり，p_jは同じ軸の方向の全角運動量の成分である，ということである．

一般化力 Q_jは，この場合にもやはり，

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

で与えられる．導関数だけは，今度は違った意味をもっている．ここでは，

q_jの変化はベクトル $\mathbf{r}_i$の無限小回転に相当し，ベクトル$\mathbf{r}_i$の大きさは一定に保たれなければならない．図２－８から導関数の大きさは容易に求めることができる．すなわち，

$$|d\mathbf{r}_i| = r_i \sin\theta \, dq_j ,$$

であり，したがって，

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right| = r_i \sin\theta ,$$

p. 59
となる．その方向は，$\mathbf{r}_i$と $\mathbf{n}$ の両方に垂直である．明らかに，導関数はベクト

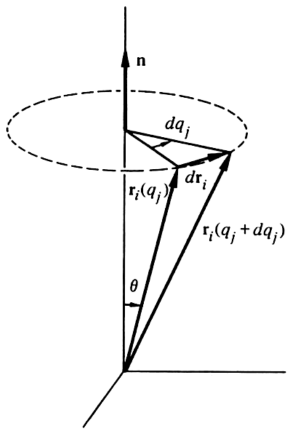


図２－８
系の回転の際の位置ベクトルの変化．

ルの形で，

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i , \tag{2－50}$$

と書くことができる．この結果を用いると，一般化力は，

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i$$

$$= \sum_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i ,$$

すなわち,

$$Q_j = \mathbf{n}\cdot\sum_i \mathbf{N}_i = \mathbf{n}\cdot\mathbf{N},$$

となる．これで，前に述べたことの前半が証明された．p_jを同じように取り扱えば，後半も証明できる．すなわち,

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \mathbf{n}\cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \\ &= \mathbf{n}\cdot\sum \mathbf{L}_i = \mathbf{n}\cdot\mathbf{L}, \end{aligned}$$

が得られる．

これらの結果をまとめると，回転座標 q_j がサイクリックであるならば，加えた全トルクの $\mathbf{n}$ 方向の成分である Q_j が零になって，$\mathbf{n}$ 方向の $\mathbf{L}$ の成分が一定になることがわかる．ここで，再び角運動量の保存則を，サイクリックな座標に関する一般的な保存則から得ることができた．

ここで，並進あるいは回転のサイクリックな座標が，系の性質に関連して持っている意味を注意しておく方がよいであろう．もし，並進に対応する座標がサイクリックであるならば，それは系の並進が，あたかも系が剛体であるかのように，この問題に対しては何の影響も与えないことを意味する．言葉を換えていうと，もし，系がある与えられた方向の並進に対して**不変**（*invariant*）であるならば，その方向の線運動量が保存される．同じように，回転座標がサイクリックである（したがってそれに共役な運動量が保存される）ということは，系が，与えられた軸のまわりの回転に対して不変であることを示している．このように，運動量の保存則は，系の**対称性**（*symmetry property*）と密接な関係がある．もし系が，球対称の性質を持っているならば，直ちに，系の角運動量のすべての成分が保存される，ということができる．あるいは，もし系が z 軸のまわりにのみ対称であるならば，L_zだけが保存される．他の軸についても同じである．このような対称性の考察は，比較的複雑な問題の場合に，運動の定数（constant of motion）が存在するかどうかを，視察によって決めるために，しばしば用いられる．例えば，無限に拡がった平面上に，一様に分布し

ている固定された源（source）によって作られるポテンシャルの場の中を運動している質点系を考えよう（源は，力が重力であれば質量分布であり，また力が静電力であれば電荷分布である）．この平面を $z=0$ の平面としよう．そうすると，この問題の対称性は，ラグランジアンが，x 方向と y 方向（z 方向
p.60
は除く）の並進および z 軸のまわりの回転に対して不変になっているということである．直ちに，全線運動量の x 成分と y 成分，P_x と P_y，および全角運動量の z 成分 L_z が運動の定数であることが結論される．しかし，もし源が，半平面 $x\geqslant 0$ だけに制限されていれば，x 軸方向への並進と，z 軸のまわりの回転に関する対称性は破れてしまう．その場合には，P_x と L_z は保存されないが，P_y は依然として運動の定数である．運動の定数と，系のもつ対称性との関係には，後の章でもしばしば出会うであろう．

ラグランジアン形式において，当然得られることが期待される他の保存則は，力が位置のみに依存するようなポテンシャルから導かれるような系に対する，全エネルギーの保存則である．実際，全エネルギーの保存則が特別な場合を表わしているような，保存則を証明することができる．座標 q_j と速度 $\dot{q}_j$ の関数であって，また時間に陽に依存していてもよいような，一般的なラグランジアンを考えよう（陽な時間依存性は，外場のポテンシャルが時間的に変化する場合や，時間に依存する拘束がある場合などに現われる）．このときには，L の時間についての全導関数は，

$$\frac{dL}{dt}=\sum_j\frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt}+\sum_j\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt}+\frac{\partial L}{\partial t}\quad, \tag{2-51}$$

である．Lagrange の方程式によって，

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right),$$

であるから，（2－51）式は，

$$\frac{dL}{dt}=\sum_j\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)\dot{q}_j+\sum_j\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt}+\frac{\partial L}{\partial t}\quad,$$

すなわち，

$$\frac{dL}{dt}=\sum_j\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)+\frac{\partial L}{\partial t}.$$

と書くことができる．したがって，次の結果が得られる．

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}-L\right)+\frac{\partial L}{\partial t}=0. \qquad (2-52)$$

括弧の中の量は，しばしば**エネルギー関数**（*energy function*）と呼ばれる*．
p. 61
それを h と書くことにする．

$$h(q,\dot{q},t)=\sum_j\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}-L\,. \qquad (2-53)$$

すると，（2－52）式は h の時間に関する全導関数を与えるものと考えることができる．すなわち，

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}\;. \qquad (2-54)$$

もし，ラグランジアンが時間の陽な関数でないとすれば，すなわち，t は L の中には陽には現われず，q と $\dot{q}$ の時間変化を通じてのみ陰に現われるとすれば，（2－54）式は h が保存されることを述べている．それは，運動方程式の第1積分の一つであり，Jacobi の積分と呼ばれることがある**．

一定の条件の下では，関数 h は系の全エネルギーになる．これらの条件が何であるかを定めるために，ある系の運動エネルギーが，常に，

$$T=T_0+T_1+T_2, \qquad (1-73)$$

と書けることを思い出そう．ここで T_0 は一般化座標のみの関数，$T_1(q,\dot{q})$ は一般化速度に関して1次関数，また $T_2(q,\dot{q})$ は $\dot{q}$ の2次関数である．非常に広い範囲の系，および一般化座標のとり方に対して，ラグランジアンも，その変数

---

*) エネルギー関数 h の値はハミルトニアン H（第8章を見よ）の値と同じである．それが，ここでは異なった名前と記号を与えられているのは，h は n 個の独立な座標 q_j と，その時間的導関数 $\dot{q}_j$（ならびに時間）の関数であると考えているのに対して，ハミルトニアンは $2n$ 個の独立変数 q_j, p_j の関数（場合によっては時間をも含み得る）として扱われる，ということを強調するためである．

**) この名称は，大抵の場合，制限された3体問題における第1積分に限って用いられる．しかし，その場合の積分は，エネルギー関数 h の特別な場合に過ぎない．また，歴史的にも，より一般的な場合に，Jacobi の積分という名称を用いた例がある．

$\dot{q}$についての関数形に関して，同じように，

$$L(q,\dot{q},t) = L_0(q,t) + L_1(q,\dot{q},t) + L_2(q,\dot{q},t). \qquad (2-55)$$

と分解できる．ここでL_2は$\dot{q}$について（単に2次関数であるだけでなく），2次の同次関数であり，L_1は$\dot{q}$について1次の同次関数である．ラグランジアンを，（2－55）式の形に制限する理由は，力学の範囲にはないが，実際には興味ある問題の殆どすべての場合にそうなっている．力が，速度を含まないポテンシャルから導かれるときには，ラグランジアンは明らかにこの形になる．速度に依存するポテンシャルの場合でも，電磁場の中の荷電粒子に対するラグランジアン（1－66）式は（2－55）式を満足している．さて，Eulerの定理に
p.62
よると，fが変数x_iに関するn次の同次関数である場合には*，

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf \qquad (2-56)$$

であることを思い出そう．この定理を，（2－55）式の形のラグランジアンの場合に，（2－53）式で与えられる関数hに対して適用すると，

$$h = 2L_2 + L_1 - L = L_2 - L_0 \qquad (2-57)$$

となる．もしも，一般化座標を定義する変換式（1－38）式が，時間を陽に含まなければ，（1－68）式によって，$T = T_2$である．さらに，もしポテンシャル・エネルギーが一般化速度に関係しなければ，$L_2 = T$および$L_0 = -V$であり，したがって，

$$h = T + V = E, \qquad (2-58)$$

となって，エネルギー関数は実際に全エネルギーである．このような条件の下では，もしVが時間を陽に含まなければ，Lもまた時間を陽に含まないであろう．そうすると，ここでは全エネルギーであるhは，式（2－54）によって，保存されるであろう．

hが保存されるための条件は，hが全エネルギーと同じになるための条件と，

---

*）大抵の解析学の教科書に出ている．例えば，W. Kaplan, *Advanced Calculus*, 2d ed., p. 139を見よ．

原理的には全く異なるということは強調しておかなければならない．特定の問題においては，一般化座標を適当に選んで，hは保存されるが，全エネルギーには等しくないようにすることができる．他方hが$T+V$の形の全エネルギーであるが，保存されないような場合も起こり得る．さらにラグランジアンは，各系に対して一般化座標の選び方によらず，

$$L = T - U,$$

によって一意的に決定されるけれども，エネルギー関数hの大きさや関数形は，一般化座標のとり方によるということも，注意しておいた方が良いであろう．同一の系に対しても，どのような一般化座標が選ばれたかによって，異なった物理的内容をもつ種々のエネルギー関数が得られるのである．

最後に，系が保存的でなく，散逸関数から導かれる摩擦力が存在する場合には，$\mathscr{F}$はhの減少の割合と関係づけられる，ということが容易に示されるということに注意しておこう．すなわち，散逸があって，運動方程式が（1－70）式で与えられるようなときには，（2－52）式は，

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = -\sum_j \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\ ,$$

p. 63

となる．$\mathscr{F}$の定義（1－67）式によって，それは$\dot{q}$について2次の同次関数である．したがって，再び Euler の定理を用いると，

$$\frac{dh}{dt} = -2\mathscr{F} - \frac{\partial L}{\partial t}. \qquad (2-59)$$

が得られる．もし，Lが時間の陽な関数ではなく，かつhがエネルギーと同じであるような系であれば，（2－59）式から$2\mathscr{F}$はエネルギーの散逸の割合に等しいこと，すなわち，

$$\frac{dE}{dt} = -2\mathscr{F}, \qquad (2-60)$$

が成立することがいえる．これは以前に，もっと特殊な場合には証明された関係式である（31ページ参照）．

参　考　書

R. COURANT AND D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1.　変分法についての文献は，読む気をくじけさせる程分量が多く，通常は，この章で必要なことよりずっと広い範囲のことが書いてある．“物理学者のための数学”についての殆どの文献は変分法について簡単に論じている．中でも Courant と Hilbert の古典的な著作の第6章は，最も明確に書かれたものの1つである．

R. WEINSTOCK, *Calculus of Variations*.　これは物理学者にとって読み易い書物である．実際，この書物の半分以上が，物理学への応用問題に関するものである．基本定理は，第3章の初めで扱われており，面積極小の回転面の問題に対する連続な解についてのいくつかの困難が第3－7節で述べられている．

G. A. BLISS, *Calculus of Variations*.　比較的古い変分法の文献のうちで，この小冊子は最速降下線のような標準的な問題のいくつかに対して，その解の性質を詳細に論じていることで著名である．第4章には，面積極小の回転面に関して知りたいことは，殆ど全部書いてある．

L. A. PARS, *An Introduction to the Calculus of Variations*.　変分法の比較的簡単な数学的側面が，（著者の思った程ではないが）物理学上の応用に気を使いながら，注意深く，また丹念にまとめられている．基本補題（およびその系）は第Ⅱ章に与えられている．253ページには，非ホロノミック系についての簡単な注意書きがある．

C. LANCZOS, *The Variational Principles of Mechanics*.　この書物の最初の5章は，この章の内容についての，著者独得の立場を加味した，ゆったりとしたまとめに当てられている．第10章は，歴史的な所見も書かれていて，特に興味深い．本書と，議論の進め方はかなり異なっているけれども，1冊の参考書としては，この章全体にわたって，おそらく最良のものであろう．

E. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*.　この章の主題の扱い方は，現在においてもやはり興味深い．特に多くの脚注は他書には見出せないものがある．保存則は第3章で論じられ，他方 Hamilton の原理と，その Lagrange の方程式からの導出（この章 p.64 で行ったやり方と逆の道すじ），は第Ⅸ章にある．この議論を用いれば，Lagrange 形式の微分方程式が存在するということは，それに付随した変分原理が，常に存在していることを意味することになる．したがって，2階の連立微分方程式が，どのようなときに，Lagrange 形式になっているか，またはそのように書き直せるかは，興味ある問題である．この問題には，はじめ，1887年に Helmholtz が取り組んだ．彼が見出した条件，およびそれに付随したいくつかの結果については，P.Havas

のみごとで詳細な総合報告が *Nnovo Cimento Supplement*, vol. 5, p. 363(1957)に出ている．

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*. これは，天才 Lev Landau の記念碑ともいうべき，**理論物理学教程**(*Course of Theoretical Physics*)の第1巻である．信じ難い程多くの題材が(英訳版で)166ページという少ない紙数の中に収められており，注意深く読むと，本書が扱った主題に関することは，殆どのことが出つくしていることがわかるであろう．そのスタイルは，紙の上に書かれた"手振り入りの議論"といえるもので，論理展開の中にしばしば穴があいている部分があるが，物理的洞察は大変価値がある．第1章と第2章が，特に本書のこの章と関連がある．

W. E. Byerly, *Generalized Coordinates*. 幸いにして，リプリント版が依然として手に入れられる．この小さな書物は，特にラグランジアンを使って力学の問題を立てたり，それを解いたりする技巧に関する詳しい例題が，たくさん載っているために貴重である．索引のついていないのが惜しむべき点で，そのために，この書物の利用が幾分困難になっている．

D. W. Wells, *Lagrangian Dynamics*. 不純物がないという誤ったラベルを貼られることもあるが，この書物は概要としては，ラグランジアン形式の力学の，広範な側面からの，詳細で実際的な問題を豊富に含んでいるといえる．第6章では，摩擦がある場合の散逸力については，ラグランジアン形式の枠内で大変詳しく扱われている(著者のいう"仕事率関数"(power function)は，本書の散逸関数のことである)．第15章は，電気的な系の Lagrange の方程式および電気的な系と力学的な系との相互作用に当てられている．(拘束力に関する)第12章と(Hamiltonの原理に関する)第17章も有用である．

H. F. Olson, *Solution of Engineering Problems by Dynamical Analogies*. この書物は，与えられた力学的および音響学的な系と，等価な電気回路の問題を大変詳しく論じ，純粋に力学的あるいは音響学的な問題を解くために，回路論を応用することを実例を挙げて説明してある．ラグランジアンそのものの導入の仕方，および使い方についての記述は簡単である．次の参考書は，もっと透徹した，Lagrange 形式の立場から書かれているのが特徴である．

B. R. Gossick, *Hamilton's Principle and Physical Systems*. 非力学的系について，他の系への議論もあるが，電気工学への応用が強調されている．著者が特に関心を示しているのは，非保存的な(しかし線形な)系で，散逸関数の概念を，電磁放射によるエネルギー損失をも含むように拡張している．

H. Rund, *Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*. 非ホロノ

ミック系に対するHamiltonの原理については，多くの書物で扱われているが，その殆どは（初版に書いたいくつかのことも含めて）間違っている．Rundのこの書物は，大変数学的ではあるが，現実的な物理の問題で出会う“病理学的な”(pathological)問題についての興味深い多くの議論がなされている．そういうわけで，本書でも，今後時々引用するであろう．特に関係があるのは，非ホロノミックな力学系についての第5−5節で，そこでは（2−2）式の形のHamiltonの原理は，ホロノミックな拘束の場合にのみ適用できるという当り前の結論に達している．本書で用いた，仮想変位から構成される，変化した道すじに基づいたLagrangeの未定乗数法は，H.Jeffreys と L. A. Pars が1954年に発行された，*Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 7, p. 335 と p. 338の2つの論文にずっと詳しく調べている．

演 習 問 題

p. 65
1. 空間における2点間の最短距離は直線であることを証明せよ．

2. 球面上における測地線は大円，すなわちその中心が球の中心にある円であることを示せ．

3. 第2−2節で扱った最速降下線の問題の解を完成し，求める曲線が質点を放した点を先点（cusp）とするサイクロイド（cycloid）であることを示せ．また，もし質点が，最初に $\frac{1}{2}mv_0^2$ の運動エネルギーをもって投げ出されるならば，最速降下線は，やはり（与えられた2点を通る）サイクロイドで，その先点は最初の点よりも $v_0^2 = 2gz$ で決められる高さ z だけ上にあることを示せ．

4. 地球が密度一様な球であるとして，その内部を最速降下線を描いて運動する質点に対するEuler-Lagrangeの方程式を求めよ．Jacobiの積分 h との類推から，この微分方程式の第1積分を求めよ．この第1積分を用いて，求める曲線は内サイクロイド（hypocycloid）（大きな円の内側に接してころがる円の周上の1点が描く曲線）であることを示せ．地表にある2点を通る最速降下線に沿って動くときに要する時間の式を求めよ．ニューヨークとロスアンゼルスの間（3,000マイル離れているとして）を，最速降下トンネル（brachistochrone tunnel）に沿って動くとき，摩擦がないとして，どの位の時間がかかるか．また，このトンネルの最深点は，どれだけの深さか．

5. 面積極小の回転面の問題で，$y_2 = y_1, x_2 = -x_1 > 0$ であるような対称的な場合を調べ，パラメーター a に対する条件を，無次元の量 $k = x_2/a$ および $\alpha = y_2/x_2$ を用いて，超越方程式（transcendental equation）として表わせ．αがある値 α_0 よりも大きければ，2つの k の値が可能であり，$\alpha = \alpha_0$に対しては1つの k の値だけが可能である

が，$\alpha<\alpha_0$ならば実数の k（または a）の値は見出せず，この領域では懸垂線の解は存在しない，ということを証明せよ．α_0の値を求めよ．必要ならば数値的に求めよ．

6. 回転面が，両端にある，半径がそれぞれ y_1 および y_2 の2つの円だけになる，本文（53ページ）に述べられている折れ線の解は，**Goldschmidtの解** として知られている．上の問題5で議論された対称的な場合に対して，懸垂線の解によって作られる面の面積と，Goldschmidt の解によって作られる面の面積との比を表わす式を求めよ．結果は k および α だけの関数になるはずである．α の値が十分大きいときには，少なくとも一方の懸垂線は，Goldschmidt の解よりも小さい面積を与えることを示せ．他方，$\alpha=\alpha_0$ ならば，Goldschmidt の解は懸垂線よりも小さい面積を与えることを示せ．

7. 地表からの高さが y_1，y_2，水平距離が x_2-x_1 である2つの滑車に，十分長い鎖またはロープが拘束を受けずにかけ渡されている．鎖またはロープの線密度が一様であるとすると，滑車の間の鎖またはロープが描く曲線を求める問題と，面積極小の回転面を求める問題とは同じであることを示せ（高さ y_1，y_2を変えたときの Goldschmidt の解への移行は，大変適切な教訓的実例である）．

8. 質点が，与えられた距離 y_0を落下するのに要する時間は $t_0=\sqrt{2y_0/g}$であることが実験でわかったが，y_0以外の距離を落下する時間はわからなかったと仮定しよう．さらに，この問題に対するラグランジアンはわかっているが，t の関数としての y に対する運動方程式を解くかわりに，$y(t)$の関数形が，

p.66

$$y=at+bt^2$$

であることが推定されると仮定しよう．もし，定数 a と b を，y_0だけ落下する時間が t_0 によって正しく与えられるように，常に調節するならば，積分，

$$\int_0^{t_0} L\,dt\ ,$$

は，係数の実数値に対しては，$a=0$，$b=g/2$ であるときに限って極値をとることを直接に証明せよ．

9. 2個の玉つきの玉が衝突するとき，これらの間に瞬間的に作用する力は大変大きいけれども，それは次の量，

$$\int_{\Delta t} F\,dt$$

が有限の大きさになるように，きわめて短かい時間 Δt の間作用するだけである．そのような**撃力**（*impulsive force*）として知られており，Δt にわたる積分は**力積**（*impulse*）といわれる．撃力のあるときには，Lagrange の方程式は，

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_f - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_i = S_j,$$

のように変形されることを示せ．ただし，添字 i および f は，衝突の前および後における系の状態を示し，S_j は q_j に対応する一般化撃力の力積であって，L は撃力以外のすべての力を含むラグランジアンである．

10. 一般化力学(*generalizd mechanics*)という用語は，ラグランジアンが q_i の時間についての1階よりも高い階数の導関数を含んでもよい様な広い範囲の古典力学を指すようになった．ラグランジアンが，$L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$ の形をしていて，端点では q_i と $\dot{q}_i$ の変分が零であるような Hamilton の原理が成立すると仮定して，変分法を適用すると，対応する Euler-Lagrange の方程式は，

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

となることを示せ．この結果を，ラグランジアンが，

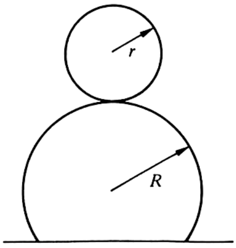
$$L = -\frac{m}{2} q\ddot{q} - \frac{k}{2} q^2 \quad ,$$

で与えられる場合に適用せよ．その運動方程式に見覚えがあるか？

11. 鉛直な輪の頂上に重い質点がおかれている．Lagrange の未定乗数法と Lagrange の方程式を用いて，質点に対する輪の反作用を計算せよ．質点が輪から離れ落ちる高さを求めよ．

12. 質量 m，半径 r の一様な輪が，半径 R の固定された円筒上を，図に示されているように，滑らずにころがるとする．外力は重力だけとする．小さい方の円筒が，大きい方の円筒の頂上から，静止の状態からころがり始めたと仮定して，輪が円筒から離れ落ちる点を，Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ．

p. 67



13. Wheatstone のインピーダンス・ブリッジは，通常の4つの抵抗のほかに，1つの腕にはインダクタンスが，それと向い合う腕にはキャパシタンスがはいっている．ブリッジが釣り合っていないとき，各要素の中の電荷を座標にとって，L および $\mathscr{F}$ を作れ．Kirchhoff の法則を，電流に対する拘束条件として用いて，Lagrangeの運動方程式を求めよ．また，未定乗数 λ を消去すると，この方程式は通常の回路網の方程式に帰着されることを示せ．

14. ある場合，特に1次元的な系の場合には，散逸関数を導入せずに摩擦の影響を取り入れることが可能である．例えば，ラグランジアンが，

$$L = e^{2\gamma t}\left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2}\right],$$

で与えられる場合に対して，運動方程式を書いてみよ．この系はどのような系であるか？運動の定数は存在するか？　いま，

$$s = e^{\gamma t}q ,$$

の形の点変換をしたとしよう．s を用いると，有効ラグランジアンはどのように表わせるか．s に対する運動方程式を求めよ．これらのことから，系の保存量に関して何がいえるか？

15. もしラグランジアンの中のポテンシャルが速度に依存する項を含むならば，系全体の回転を表わす座標 θ に対応する正準運動量は，もはや力学的な角運動量 L_θ ではなくて，

$$p_\theta = L_\theta - \sum_i \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_i \times \nabla_{\dot{\mathbf{r}}_i} U,$$

で与えられることを示せ．ただし $\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}$ は勾配演算子で，この場合，導関数は速度の各成分についてとる．また $\mathbf{n}$ は回転軸の方向の単位ベクトルである．したがって力が電磁気的なものであれば，正準運動量は，

$$p_\theta = L_\theta + \sum_i \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_i \times \frac{q_i}{c}\mathbf{A}_i.$$

となる．

16. 一般化座標が，運動エネルギーの中でも，またポテンシャル・エネルギーの中でも，分離して現われ，T および V がそれぞれ

$$T = \sum_i f_i(q_i)\dot{q}_i^2 \quad \text{および} \quad V = \sum_i V_i(q_i),$$

p. 68
の形に書けることがしばしばある．そのような場合には，Lagrange の方程式は各座標

に関するものに分離されて，問題は常に求積法[1](quadratures)の形に帰着させることができることを示せ．

17. 一定の角速度ωで鉛直軸のまわりに回転している，鉛直な平面内に固定された，半径aの質量のない輪の上を動くように拘束された質点がある．外力は重力だけであると仮定して，Lagrangeの運動方程式を求めよ．運動の定数は何か？ もしもωが，ある臨界値ω_0よりも大きければ，質点が輪の底の点以外の点に静止しているという解があり得るが，$\omega < \omega_0$ならば，質点が静止していられるのは，輪の底の点に限られる．このことを証明せよ．ω_0の値はいくらか．

18. 質点が，いろいろな質量分布によって作られる保存力の場の中を運動している．各瞬間に，その分布におけるある体積要素から作られる力は，その体積要素の質量に比例し，体積要素からの距離だけの関数であるポテンシャルから導かれるとする．以下に挙げるような，固定された，一様な質量分布の場合，質点の運動において保存される量を述べよ．

a）平面$z=0$内に一様に分布した質量．

b）半平面$z=0, y>0$内に一様に分布した質量．

c）z軸に沿う軸を持つ無限に長い円筒内に一様に分布した質量．

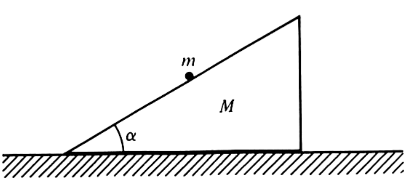
d）z軸に沿う軸をもつ，有限な長さの，円筒内に一様に分布した質量．

e）z軸に沿う軸をもつ，無限な長さの，断面が楕円である直楕円柱内に，一様に分布した質量．

f）軸がz軸方向を向いている亜鈴内に，一様に分布した質量．

g）一様な針金を，z軸に沿う軸を持つ無限に長いらせん形ソレノイド状に巻いた質量分布．

19. 滑らかな水平面上を，摩擦なく動くことのできる，角度α，質量Mのくさびの上を，摩擦なしに質量mの質点がすべるとする(図参照)．質点がくさびの上にあるという拘束を，Lagrangeの未定乗数法を用いて扱い，質点およびくさびに対する運動方程



1）微分方程の解を有限回の積分で表わす方法．

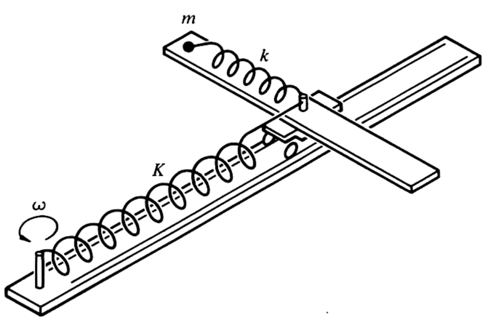
式を求めよ．また，拘束力を表わす式を求めよ．質点およびくさびに作用する拘束力によって時間 t の間になされる仕事を計算せよ．この系の運動の定数は何か．くさびが固定されている場合の結果と比較せよ［**ヒント：**質点に対する直交座標系の y 方向としては，鉛直方向，またはくさび面の法線方向のいずれを用いてもよい．練習のためには，両方でやってみるのがよい］．

20. 台車は，剛体である梁の上のレールを走るものと考える．台車は自然長 r_0，ばねの定数 K のばねの1端につながれている．ばねの他端は上記梁に固定されている．台車
p. 69 の上には第1のレールに垂直にもう1つのレールが備えられている．このレールの上を，梁に固定されたばね定数 k，自然長が零のばねに結ばれた質点が動く．梁，レール，ばね，および台車の質量は零であると仮定する．系全体は第1のばねが固定されている点のまわりに，一定の角速度 ω で，1平面内に回転させられている．第2のばねの長さは，r_0 に比べると常に小さいと考えられるものとする．

a) 系のエネルギーはいくらか．それは保存されるか？

b) 実験室系において，一般化座標を用いると，系の Jacobi の積分はいくらか．それは保存されるか？

c) 角速度 ω で回転している座標系に関する一般化座標を用いると，ラグランジアンはどのようになるか？　Jacobi の積分はいくらか？　それは保存されるか？　2つの Jacobi 積分の間の関係について論ぜよ．



21. ポテンシャルが $V(\mathbf{r})$ である保存力を受けて空間内を運動する質点が，常に $\sigma(\mathbf{r},t)=0$ という方程式で表わされる面上を動くとする（面を表わす式 $\sigma(\mathbf{r},t)=0$ が時間 t に陽に依存しているということは，面が動いているかも知れないことを意味する）．瞬間的な拘束力は常に面に垂直であるとする．もしも面が，時間とともに動けば，質点の

エネルギーは保存されないということを解析的に示せ．このような場合，エネルギーが保存されないことの物理的理由は何か．

22. 1次元の調和振動子のラグランジアンは $L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$ で与えられる．運動方程式の解はわからないが，運動は周期的でなければならないので，x は，

$$x(t) = \sum_{j=0} a_j \cos j\omega t$$

という形の Fourier 級数で記述できるということはわかったとする．ただし，$t = 0$ を転回点にとり，ω は運動の（未知の）角振動数である．$x(t)$ に対するこの表わし方は，配置空間内の系の点に対して，多くのパラメーターによって決まる道すじを定義する．周期 $T = 2\pi/\omega$ だけ離れた2つの点 t_1，t_2 に対して，このような形を用いると，x が零でない場合には，I が極値となるのは $j \neq 1$ ならば $a_j = 0$ でかつ $\omega^2 = k/m$ である場合に限ることを証明せよ．

第３章　中心力の２体問題

p.70 この章では，ラグランジアン形式の１つの応用として，互いに中心力を及ぼし合いながら運動する２体問題を論ずる．中心力の問題がすべて，よく知られた関数を用いて積分できるわけではないが，すでに詳しく論じておいた道具立てを用いて，この問題を，できるだけ徹底的に調べてみることにしよう．

3−1　等価な１体問題に帰着させること

２つの質点 m_1，m_2 から成る１元系（monogenic system）を考え，相互作用のポテンシャルUに基づく力だけが作用するものとしよう．最初にUは２つの質点の間の相対位置ベクトル $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$，あるいはその相対速度 $\dot{\mathbf{r}}_2-\dot{\mathbf{r}}_1$，あるいは $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ の任意の高階導関数の任意の関数であると仮定しよう．そのような系は，６個の自由度を持っているから，独立な一般化座標も６個ある．この６個の座標として，質量中心の動径ベクトルの３個の成分と，相対位置ベクトル $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ の３個の成分を選ぶことにしよう．そうすると，ラグランジアンは

$$L = T(\dot{\mathbf{R}},\dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},\ldots), \qquad (3-1)$$

の形を持つ．

p.71 運動エネルギーTは，質量中心の運動エネルギーと，質量中心のまわりの運動の運動エネルギーT'の和として書くことができる．すなわち，

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + T',$$

であり，

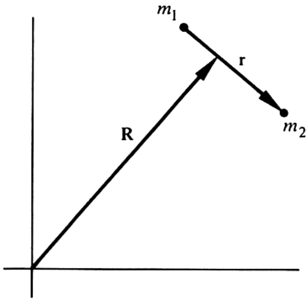


図3－1
２体問題に対する座標.

$$T' = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^2$$

である．ここで $\mathbf{r}_1'$ と $\mathbf{r}_2'$ は，２つの質点の質量中心に相対的な動径ベクトルであって，$\mathbf{r}$ との関係は，

$$\mathbf{r}_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r},$$

$$\mathbf{r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}\ , \qquad (3-2)$$

で与えられる．（３－２）式を用いて，T'を $\mathbf{r}$ で表わすと，

$$T' = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2\ ,$$

の形となり，全ラグランジアン（３－１）式は，

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ldots)\ , \qquad (3-3)$$

となる．

Rの３個の成分は，サイクリックであり，したがって，質量中心は静止しているか，等速度で運動しているかのどちらかであることがわかる．$\mathbf{r}$ に対する運動方程式は，どれも **R** あるいは $\dot{\mathbf{R}}$ に関係する項は含まない．それゆえ，この場合には，サイクリックな座標を消去する手続きは，特に簡単であって，以下

のすべての議論において，単にラグランジアンの最初の項を落としてやればよい．

ラグランジアンの残りの部分は，力の中心が固定されていて，その中心から $\mathbf{r}$ の距離に，質量，

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad (3-4)$$

を持つただ1つの質点がある場合のラグランジアンと全く同じ形を持っている．この μ は**換算質量**（*reduced mass*）として知られている．（3－4）式は，しばしば，

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \qquad (3-5)$$

の形に書かれる．このようにして2つの質点が中心力の下で行う質量中心に相対的な運動は，常にそれと同等な1体問題に帰着させることができる．

3－2　運動方程式と第1積分

さて，問題を保存的中心力（conservative central forces）の場合に限ることにしよう．その場合には，ポテンシャル $V(r)$ は r のみの関数であり，したがって，力は常に $\mathbf{r}$ に沿う方向に作用する．前節の結果によれば，固定した力の
p.72
中心のまわりを運動する質量 m の1個の質点の問題を考えればよいことになる．この力の中心を座標系の原点にとることにしよう．位置エネルギーは，動径距離（radial distance）のみに関係するから，問題は球対称性をもっている．すなわち，どの固定軸のまわりのどのような回転も，問題の解に対してなんの影響も及ぼさない．したがって，1つの固定軸のまわりの回転を表わす角座標は，サイクリックでなければならない．このような対称性のために，問題はかなり簡単化される．すなわち，系が球対称であるから，全角運動量ベクトル，

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

は保存される．したがって，$\mathbf{r}$ は，空間に固定された $\mathbf{L}$ の方向に常に垂直になる．そのことは，$\mathbf{r}$ が常に $\mathbf{L}$ に平行な方向の法線をもつ平面内にあるときにの

みいえることである．$\mathbf{L}$が零であれば，このような推論はできないけれども，その場合には運動は力の中心を通る線に沿って行われることになる．なぜなら，$\mathbf{L}=0$であれば，$\mathbf{r}$は$\dot{\mathbf{r}}$に平行でなければならないが，このことは直線運動においてのみ満足されるからである*．こういうわけで，中心力の下における運動は，常に1平面内での運動になる．ところで，空間におけるただ1つの質点の運動は，3つの座標を用いて記述される．球面極座標(spherical polar coordinates，空間極座標ともいう)では，方位角(azimuth angle) θ，天頂角(zenith angle，あるいは余緯度(colatitude)) ψ，および動径距離rがそれである．極軸(polar axis)を$\mathbf{L}$の方向に選ぶと，運動は常に極軸に垂直な平面内で行われる．そうすると，座標ψは一定値$\pi/2$のみをとるから，以下の議論では落としてしまうことができる．角運動量ベクトルの保存によって，(その直交成分に相当する)独立な3つの運動の定数が与えられる．実際には，このうちの2つは，角運動量が一定の**方向**を向いていることを表わすものとして，問題の自由度を3から2に減らすために，すでに用いられた．第3の運動の定数は，$\mathbf{L}$の大きさに対応するものであって，これは解を完全に求めるため，自由に使えるものとして，まだ残っている．

さて，ラグランジアンを，平面極座標(plane polar coordinates)で表わすと，

$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)
\end{aligned}
\qquad (3-6)
$$

となる．前に見たように，θはサイクリックな座標であって，これに対応する正準運動量は，系の角運動量，

$$
p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}\,,
$$

である．したがって2つの運動方程式のうちの1つは，単に

---

*）式で書けば，$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{n}_r + r\dot{\theta}\mathbf{n}_\theta$ である．したがって $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}=0$ であれば，$\dot{\theta}=0$ でなければならない．

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0\,, \qquad (3-7)$$

p.73
となり，その積分は直ちに，

$$mr^2\dot{\theta} = l, \qquad (3-8)$$

と書くことができる．ここで，l は一定な角運動量の大きさである．（3－7）式から，また，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right) = 0\,, \qquad (3-9)$$

であることがわかる．$\frac{1}{2}$ という因数は，$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ がちょうど**面積速度**（*areal velocity*），すなわち，単位時間の間に動径ベクトルによって描かれる面積に等しくなるように付け加えられた．この解釈は，図3－2をみれば，明らかになるであろう．すなわち，dt 時間の間に描かれる微小面積は，

$$dA = \tfrac{1}{2}r(rd\theta),$$

であるから，

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

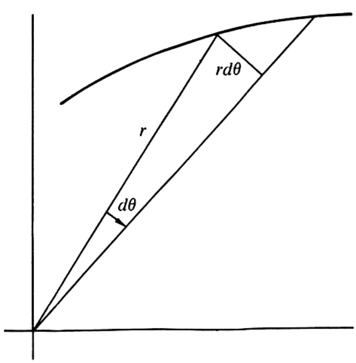


図3−2
時間 dt の間に動径ベクトルが描く面積．

である．このように，角運動量の保存則は，面積速度が一定であるということと同じことである．これで，よく知られた，惑星運動に関するＫepler の第２法則，すなわち，惑星の動径ベクトルは，等しい時間に等しい面積を描くという法則が証明された．しかし，ここで強調しておかなければならないことは，面積速度の保存は，中心力の下における運動の一般的な性質であって，逆２乗の法則に従う力だけに限られるものではない，ということである．

座標 r に対する残りのＬagrange 方程式は，

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0\,, \tag{3-10}$$

である． r の方向に沿う力，$-\frac{\partial V}{\partial r}$ を $f(r)$ で表わすと，上の方程式は，

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r) \tag{3-11}$$

p.74
と書き直すことができる．第１積分，（３－８）式を利用すると，この運動方程式から $\dot{\theta}$ を消去することができて， r のみを含む２階の微分方程式，

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r)\,, \tag{3-12}$$

が得られる．この場合，力は保存力であるから，もう１つ別に，全エネルギーを運動方程式の第１積分として利用することができる．一般的なエネルギー保存の法則に基づいて，直ちに運動の定数は，

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)\,, \tag{3-13}$$

であることがいえる．ここで E は系のエネルギーである．あるいは，もう１つの方法として，この第１積分を，運動方程式（３－７）と（３－12） から直接導き出すこともできる．後の方の運動方程式は，

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right)\,, \tag{3-14}$$

と書くことができる．（３－14）式の両辺に $\dot{r}$ を掛けると，左辺は，

$$m\ddot{r}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right)\,,$$

となる．右辺も同じように，時間に関する全導関数の形に書くことができる．なぜなら，$g(r)$ を r の任意の関数とすれば，g の時間に関する導関数は，

$$\frac{d}{dt}g(r)=\frac{dg}{dr}\frac{dr}{dt},$$

の形をとるからである．それゆえ（３－14）式は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(V+\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right),$$

あるいは，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}+V\right)=0,$$

と同等である．したがって，

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}+V=\text{一定}, \tag{3-15}$$

となる．（３－15）式は，全エネルギーが保存されることを示している．なぜなら，l に対する（３－８）式を用いると，左辺の第２項は，

$$\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}=\frac{1}{2mr^2}m^2r^4\dot{\theta}^2=\frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2},$$

と書くことができて，（３－15）式は（３－13）式の形になるからである．

p.75

この２つの第１積分によって，事実上，問題を完全に解くために必要な２つの積分が残される．この問題には，２つの変数 r と θ があるから，運動方程式を解くためには，全部で４つの積分を行う必要がある．最初の２つの積分によって，Lagrange の方程式は，２つの１階微分方程式（３－８）および（3—15）となって残っている．残りの２つの積分は，（形式的には）いろいろな方法で遂行することができる．最も簡単な方法は，おそらく方程式（３－15）から出発するものであろう．（３－15）式を $\dot{r}$ について解くと，

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V-\frac{l^2}{2mr^2}\right)}, \tag{3-16}$$

あるいは，

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}, \qquad (3-17)$$

が得られる．時刻 $t=0$ において，r が初期値 r_0 をとるものとしよう．そうすると，方程式の両辺において，最初の状態から時刻 t の状態までの積分をとると，

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}, \qquad (3-18)$$

となる．方程式（３－18）は，t を r と積分定数 E，l および r_0 の関数として与えるものであることがわかる．しかし，少なくとも形式上は，これを逆にして，r を t と積分定数の関数として与えることができる．このようにして，一度 r の解がわかれば，θ に対する解は，方程式（３－８）から 直ちに求められて，

$$d\theta = \frac{l\,dt}{mr^2}, \qquad (3-19)$$

と書くことができる．θ の初期値が θ_0 であれば，（３－19）の積分は，簡単に，

$$\theta = l\int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0 \qquad (3-20)$$

となる．方程式（３－18）と（３－20）が，残りの２つの積分である．このようにして，形式的には，問題は４つの積分定数 $E, l, r_0, \dot{\theta}_0$ を含む積分を求めることに帰着された．これらの積分定数は，考え得るただ１つのものではない．それらの代わりに，$r_0, \theta_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0$ を取ってもよかったのである．その場合には，もちろん，E と l はいつでもこの１組の定数によって決められる．しかし，多くの応用では，積分定数として，エネルギーと角運動量を含む組をとるのが自然である．量子力学では，r と θ あるいは $\dot{r}$ と $\dot{\theta}$ の初期値のような定数は意味を失ってしまうけれども，系のエネルギー，あるいは系の角運動量を用いて論ずることは，やはり可能である．実際に，古典力学と量子力学との間の著しい違いは，２つの理論における E と l の性質の中に現われるのである．したがっ

て，量子論への移り変わりを論ずるためには，系の古典的な記述を，そのエネルギーと角運動量を用いて行っておくことが大切である．

p.76

3－3　等価な1次元の問題と，軌道の分類

上のように，問題は形式的には解くことができたけれども，実際上からいえば，(3－18)式および(3－20)式の積分は非常に取り扱いにくいのが普通であって，特定の場合には，事情に応じて別の仕方で積分を行う方が便利なことがしばしばある．しかし特定の力の法則に対する解を求める前に，はっきりと解を求めなくても，運動方程式と保存則だけを用いて，一般の場合の運動について，どれだけのことがいえるかを調べてみよう．

例えば，エネルギーと角運動量が知られている系については，質点の速度の大きさと方向は，距離 r を用いて直ちに決めることができる．速度の大きさ v は，

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)\,,$$

の形のエネルギー保存則から直ちに求められる．すなわち，

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))}\,, \qquad (3-21)$$

である．動径速度 (radial velocity) ― $\dot{\mathbf{r}}$ の動径ベクトル方向の成分 ― は，すでに(3－16)式で与えられている．これと，$\mathbf{v}$ の大きさ v を結びつければ，速度の方向を知るのに十分である*．これらの結果，およびそれ以上の知識が，等価な1次元の問題の考察からも得られる．

r に対する運動方程式において，$\dot{\theta}$ を l で表わした(3－12)式は，r とその導関数だけを含んでいる．これは，質量 m の質点が，力，

$$f' = f + \frac{l^2}{mr^3}\,, \qquad (3-22)$$

*) あるいは，角運動量の保存則から角速度 $\dot{\theta}$ が与えられ，これと $\dot{r}$ とを一緒にすれば，$\dot{\mathbf{r}}$ の大きさおよび方向の両方が得られる．

の作用を受けているとする，仮想的な1次元の問題に対して得られる運動方程式と同じである．f'の中の付加項の意味は，これを$mr\dot{\theta}^2 = mv_\theta^2/r$と書いてみれば明らかであって，よく知られた遠心力にほかならない．これと同等のことが，エネルギーに対する保存則から得られる．（3－15）式によると，質点の運動は，rについては，仮想的な位置エネルギー，

$$V' = V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}, \qquad (3-22')$$

を持った1次元の問題におけるものと同じである．その裏づけとして，

$$f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = f(r) + \frac{l^2}{mr^3},$$

p.77
が（3－22）式と一致することに注意しよう．このようにして，エネルギー保存則（3－15）は，また，

$$E = V' + \frac{1}{2}m\dot{r}^2, \qquad (3-15')$$

と書くことができる．

このようにして運動を調べる1つの方法として，力が逆2乗の法則に従う引力，

$$f = -\frac{k}{r^2},$$

である特定の場合に対して，V'をrに対して描いたグラフを考えてみよう（fの式で負号は，kの正の値に対して，力が力の中心に向うことを保証する）．この引力に対する位置エネルギーは，

$$V = -\frac{k}{r},$$

であって，これに対する仮想的ポテンシャルは，

$$V' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2},$$

である．この場合のグラフは図3－3に示してある．2つの点線は，右辺の各項，

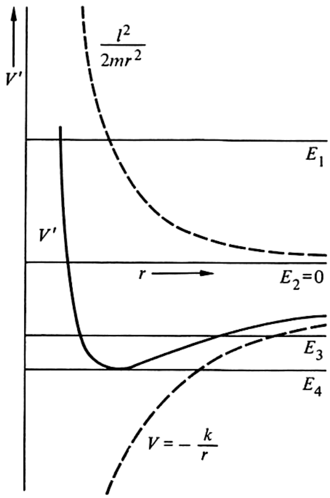


図 3−3
逆2乗の法則に従う引力に対する等価な1次元ポテンシャル.

$$-\frac{k}{r}\quad\text{および}\quad\frac{l^2}{2mr^2}$$

を表わし，実線はその和V'を表わしている.

p.78

さて，図3−3および図3−4に示すように，エネルギーE_1を持つ質点の運動を考えてみよう．明らかに，この質点は決してr_1よりも近くへ来ることはできない（図3−4参照）．もしそうでなければ，$r<r_1$のところでV'はE_1よりも大きいから，（3−15′）式によって運動エネルギーは負でなければならない．そうすると，これに対応する速度は虚数になってしまう．他方，rの可能な値に対する上限はないから，軌道は有界でない．質点は無限の遠方からやってきて，“遠心斥力の壁”（repulsive centrifugal barrier）に当ってはね返され，再び無限の遠方に引き返して行く（図3−5参照）．EとV'との間隔は$\frac{1}{2}m\dot{r}^2$である．すなわち，それは動径方向の速度の2乗に比例し，回帰点（*turning point*）r_1ではもちろん零になる．それと同時に，EとVとの間

隔は$\frac{1}{2}mv^2$であり，速度の2乗に比例する．それゆえ，VとV'に対する曲線の間隔は$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$である．したがって，これらの曲線は，与えられたエネルギーと，角運動量の下において，任意の距離rに対する質点の速度の大きさと，その成分を与える．これだけの知識があれば，軌道の形の略図を描くのに十分である．

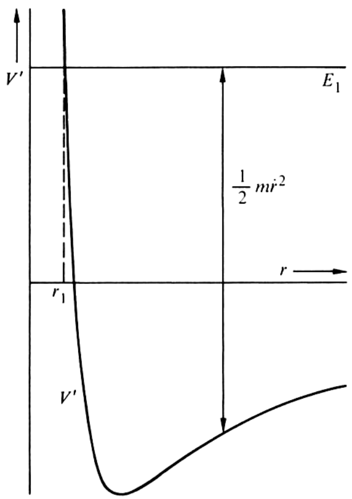


図3−4
逆2乗の法則に従う引力に対して，正のエネルギーをもつ領域における有界でない運動.

エネルギー$E_2=0$（図3−3参照）に対しては，軌道の振舞について，大体同じような図が得られる．しかし，図3−6に示してあるE_3のような，これより低いエネルギーに対しては，話が別になる．この場合には，rには下限r_1のほかに，質点が正の運動エネルギーを持つrに対して，その値が越えることのできない極大値r_2も存在している．したがって運動の範囲には“限界があり”2つの回帰点r_1とr_2ができる．これらはまた，**アプス距離**[1]（*apsidal dista-*

1）中心力の場で質点が運動するとき，その軌道上で中心からの距離が極値をとる点をアプス（apse）という．中心からアプスまでの距離がアプス距離である．惑星運動における近日点および遠日点はアプスの1例である.

nces）として知られている．このことは必ずしも軌道が閉じることを意味するものではない．ただ，軌道には限界があって，半径 r_1 および r_2 の2つの円の間にはさまれ，回帰点が常にこれらの円周上にあるということがいえるだけである（図3－7参照）．

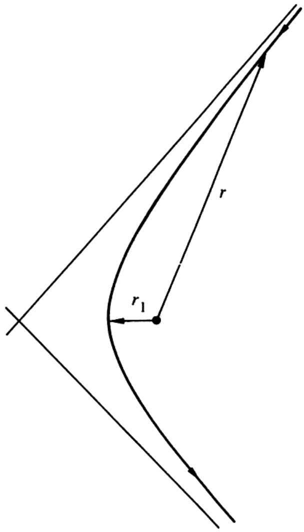


図 3－5
有界でない（限界のない）運動に相当する E_1 の値に対応する軌道の略図.

p.79
もしエネルギーが，図3－8に示すように，仮想的ポテンシャルのちょうど極小の値に相当する E_4 であれば，r の2つの限界は一致する．そのような場合には，運動はただ1つの半径に対してだけ可能である．すなわち $\dot{r}=0$ であって，軌道は円になる．有効な"力"が，V' 曲線の傾きに負号をつけたものであることを思い起こせば，軌道が円になるための必要条件は，単に f' が零であること，あるいは，

$$f(r) = -\frac{l^2}{mr^3} = -mr\dot{\theta}^2,$$

である．ここで，加えられた力が，向心加速度の“逆有効力”（reversed effective force）と大きさが等しく向きが反対であるという，円軌道に対してよく知られている基本的な条件が得られた*. 円軌道のいろいろな性質とその条件は，後の第3－6節で詳しく調べられる．

p.80

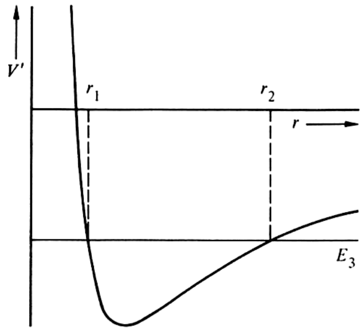
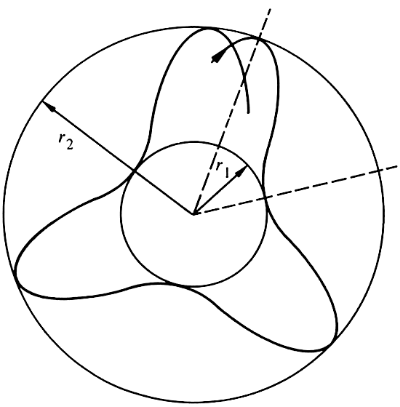


図 3−6
逆2乗の法則に従う引力に対する等価な1次元ポテンシャルと，負のエネルギー領域における有界な運動の説明.

図 3−7
有界な運動に対する軌道の性質の大体の図解（逆2乗法則に従う引力の場合ではない）.



*）$E < E_4$ の場合は物理的に可能な運動は存在しない．なぜなら，その場合には $\dot{r}^2$ が負，したがって $\dot{r}$ が虚数でなければならないからである．

いろいろなエネルギーに対する軌道についての以上の議論は，すべて，角運動量の1つの与えられた値に対して成り立つものであったということを強調しておかなければならない．l を変えると，V' 曲線の定量的な細かい所は変わるけれども，軌道の型の一般的な分類には影響を及ぼすことはない．

上に論じた逆2乗の法則に従う引力については，後にわかるように，E_1 に対する軌道は双曲線，E_2 に対する軌道は放物線，そして E_3 に対するものは楕円である．その他の力の場合には，軌道はこのような簡単な形にはならない．しかし，有界でない軌道と有界な軌道，および円軌道への，上に述べた一般的な定性的区分は，どんな引力ポテンシャルに対しても，それが次の2つの条件を
p.81 満足しているならば適用することができる．その条件は，(1) $r \to \infty$ のときに $V(r)$ が $1/r^2$ よりもゆるやかに減少すること，および(2) $r \to 0$ のとき $1/r^2$ よりもゆっくりと無限大になること，である．第1の条件は，r の大きい所で，ポテンシャルの影響が遠心力の項よりも大きいことを保証し，第2の条件は r の小さいところでは，遠心力の項の方が重要になることを示すものである．

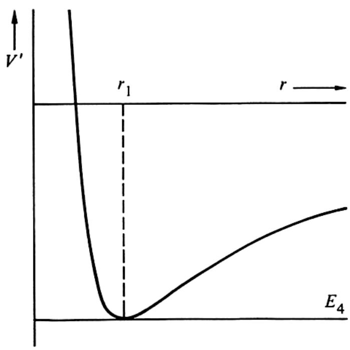


図 3−8
逆2乗の法則に従う引力に対する等価な1次元ポテンシャルと，軌道が円になるための条件の説明．

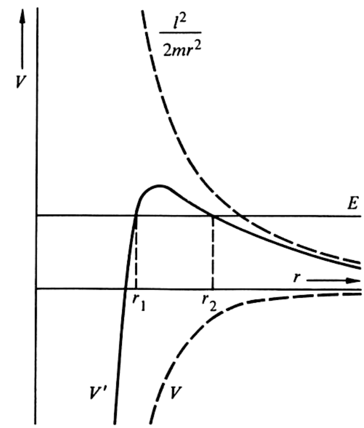


図 3−9
逆4乗の法則に従う引力に対する等価な1次元ポテンシャル．

もしポテンシャルが，これらの条件を満たさないときには，運動の定性的な性質は変わってくるであろう．しかし，そのような場合でも，上に述べた等価なポテンシャルの方法は，なお，軌道の特徴を調べるために用いることができる．その1例として，

$$V(r) = -\frac{a}{r^3},\ \text{したがって}\ \ f = -\frac{3a}{r^4}$$

で与えられる引力ポテンシャルを考えよう．この場合のエネルギーの図は図3－9に示す通りである．1つのエネルギーEに対しては，rの初期値のとり方によって，2つの型の運動が可能である．もしr_0がr_1よりも小さければ，運動は有界でありrは常にr_1よりも小さい．そして結局は質点が力の中心を通ることになる．もしrが初めにr_2よりも大きいと，いつまでもそうであって，運動の範囲に上限はない．そして質点は，決して内側のポテンシャルの“穴”にはいることはできない．$r_1 < r_0 < r_2$という初期条件は，再び物理的に不可能である．

この方法のもう1つの興味ある例は，1次の復元力(linear restoring force)，(すなわち等方調和振動子(isotropic harmonic oscillator))の場合に見られる．この場合には，

$$f = -kr, \qquad V = \frac{1}{2}kr^2\ ,$$

である．直線運動に対応する，角運動量lが零である場合には，$V' = V$であって，その様子は図3－10に示すようになる．どのような正のエネルギーに対しても，運動の範囲は限られており，よく知られているように，単振動が行われる．もし$l \neq 0$であれば，その様子は図3－11に示したようになる．すな
p.82
わち，この場合には，運動の可能なすべてのエネルギーに対して，常に範囲が限られており中心を通ることはない．この特別の場合には，軌道が楕円になることが容易にわかる．なぜなら，もし$\mathbf{f} = -k\mathbf{r}$であれば，力の$x$および$y$成分は，

$$f_x = -kx, \qquad f_y = -ky$$

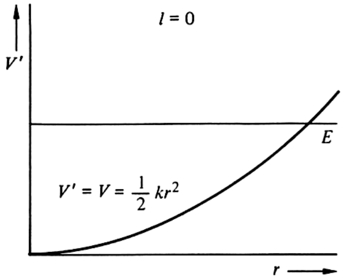


図３−10

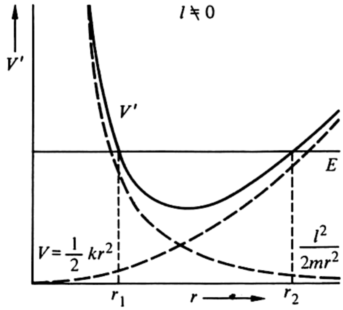


図３−11

となるから，全体の運動は，同じ振動数で，互いに直交する２つの単振動の合成されたものとなり，これは一般に楕円軌道になるからである．この運動の有名な例は，振幅の小さい球面振子（spherical pendulum）である．よく知られているLissajous の図形は，互いに直交する２つの単振動の振動数の比が有理数である場合に，その合成運動として得られる*．したがって，１次の復元力という中心力の下における運動は最も簡単な Lissajous の図形を構成することになる．

3−4　ビリアル定理

極めて多種多様な系について成立する一般的な法則，いわゆる **ビリアル定理**（*virial theorem*）の特別な場合として，中心力の運動の別の性質が導き出せる．この定理は，その本質が**統計的**（*statistical*）なものであるという点，すなわち，それがいろいろの力学的な量の時間平均に関するものであるという点で，前に論じた諸法則とは，その性質が違っている．

p.83

位置ベクトル $\mathbf{r}_i$ を持ち，力 $\mathbf{F}_i$（任意の拘束力をも含めて）の作用を受ける

---

*）例えば，K.R. Symon, *Mechanics*, 3rd ed.,（Reading, Massachusetts : Addison-Wesley, 1971）第３−10節を見よ．

質点から成る一般的な系を考えよう．その場合の基本的な運動方程式は，

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i\,, \qquad (1-3)$$

である．ここで，次の量，

$$G = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i\,,$$

に注意を向けよう．この右辺の和はすべての質点についてとる．$\dot{G}$ の時間に関する全導関数は，

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i + \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i\,, \qquad (3-23)$$

である．右辺の第１項は次のように変換できる．

$$\sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i v_i^2 = 2T.$$

第２項も，方程式（１－３）によって，

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i\,,$$

となる．したがって，（３－23）式は次のように変形される．

$$\frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = 2T + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i\,. \qquad (3-24)$$

（３－24）式の，時間間隔 τ についての時間平均は，両辺を時間，t について，0から τ まで積分して τ で割れば得られる．すなわち，

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dG}{dt}\,dt \equiv \overline{\frac{dG}{dt}} = \overline{2T} + \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}\,,$$

あるいは，

$$\overline{2T} + \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} = \frac{1}{\tau}\left[G(\tau) - G(0)\right], \qquad (3-25)$$

である．運動が周期的である場合，すなわち，すべての座標が，ある一定の時間の後に同じ値を繰り返す場合に，τ をその周期に選べば，（３－25）の右辺は零になる．運動が周期的でなくても，座標と速度が，すべての質点に対して有

限の値を持ち，したがって，Gに対して上限がある場合には，同じような結論が得られる．これは τ を十分長くとれば，（3−25）式の右辺は，いくらでも小さくすることができるからである．どの場合でも，その結果は，

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}\,, \qquad (3-26)$$

p.84 となる．（3−26）式は**ビリアル定理**として知られており，右辺は **Clausius のビリアル**と呼ばれている．この定理は（3−26）式の形で，気体分子運動論（kinetic theory of gases）において大変有用である．すなわち，次の簡潔な議論によって，ビリアル定理から，理想気体（perfect gas）に対する Boyle の法則を導くことができるのである．

体積 Vの容器の中に入れられたN個の原子からできている気体を考えよう．さらにその気体は，温度 T（この記号を運動エネルギーと混同しないようにせよ）にあると仮定する．そのとき，運動論のエネルギー等分配の定理（equipartition theorem of kinetic theory）によって，各原子の平均の運動エネルギーは，$\frac{3}{2}kT$ で与えられる．ここで k は Boltzmann の定数であり，これは実質的には温度を定義する関係式である．したがって，（3−26）式の左辺は $\frac{3}{2}NkT$ となる．（3−26）式の右辺において，力 $\mathbf{F}_i$ は原子間の相互作用の力と，系を拘束する力の両方を含んでいる．理想気体とは，原子間の相互作用の力のビリアルへの寄与が無視できるような気体であると定義される．例えば，気体が大変希薄で，容器の壁との衝突にくらべて，原子同志の衝突が稀にしか起こらないなら，上に述べたことが成立する．系を拘束するのは容器の壁であり，また拘束力 $\mathbf{F}_c$ は壁の所のみに限られ，気体原子が壁と衝突するとき常に作用する．したがって，平均では（3−26）式の右辺の和は，容器の表面上での積分で置き換えることができる．拘束力は，原子が壁に衝突することによって壁に作用する力，すなわち圧力 P の反作用を表わしている．そこで，表面の法線方向の単位ベクトル $\mathbf{n}$ の向きを，外向きにとるという通常の規約によれば．

$$d\mathbf{F}_i = -P\mathbf{n}\,dA$$

すなわち，

$$\frac{1}{2}\sum_i \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{r}_i = -\frac{P}{2}\int \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\,dA,$$

と書くことができる．ところで，Gauss の定理によって，

$$\int \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\,dA = \int \nabla\cdot\mathbf{r}\,dV = 3V,$$

であるから，ビリアル定理（3－26）式は，理想気体から成る系に対して，

$$\frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}PV,$$

と書くことができる．この式で両辺の共通因子 $\frac{3}{2}$ を取り除くと，よく知られた Boyleの法則が得られる．粒子間の力がビリアルに寄与する場合には，理想気体の法則はもちろんもはや成立しなくなる．そのときには，ビリアル定理は古典運動論において，不完全気体の状態方程式を求めるための主要な道具立てとなる．

p.85
さらに，もし力 $\mathbf{F}_i$ が，摩擦力ではない力 $\mathbf{F}_i'$ と，速度に比例する摩擦力 $\mathbf{f}_i$ の和であるならば，ビリアルは $\mathbf{F}_i'$ だけに関係し， $\mathbf{f}_i$ からの寄与はないことを証明することができる．もちろん，系の運動が摩擦力の結果止ってしまってはいけない．運動を持続させるためには，系に対して絶えずエネルギーが供給されなければならない．そうでないと，時間平均は，τ が限りなく増加するとき，すべて零になってしまうであろう（演習問題 4 を見よ）．

もし，力がポテンシャルから導かれるならば，ビリアル定理は，

$$\bar{T} = \frac{1}{2}\overline{\sum_i \nabla_i V\cdot\mathbf{r}_i}, \qquad (3-27)$$

となる．中心力の下で運動する，ただ 1 つの質点に対しては，

$$\bar{T} = \frac{1}{2}\overline{\frac{dV}{dr}r}, \qquad (3-28)$$

である．V が r のべき関数（power-law function）で，

$$V = ar^{n+1},$$

であるならば（ここでべき指数は力の法則が r^n に従うように選んだ），

$$\frac{dV}{dr}r = (n+1)V,$$

となるから，（3－28）式は，

$$\bar{T} = \frac{n+1}{2}\bar{V}, \qquad (3-29)$$

となる．同次関数についての Euler の定理（79ページ参照）を用いると，（$n+1$）次の r の同次関数である V に対して，（3－29）式もまた成り立つことは明らかである．さらに力が逆2乗法則に従う特別の場合に対しては，$n = -2$ で，ビリアル定理は，

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{V}, \qquad (3-30)$$

というよく知られた形になる．

3－5　軌道に対する微分方程式と積分可能なべき関数のポテンシャル

実際に現われる中心力の問題を，特に詳しく論ずるためには，議論の方向を変えることが望ましい．いままでは，問題を解くということは，r および θ を E, l などの積分定数を含む時間の関数として求めることを意味していた．しかし，われわれが実際に求めたいのは，多くの場合，軌道の方程式，すなわち，パラメーター t を消去した後の，r の θ に対する関数関係である．中心力の問題に対しては，t は単に微分をする変数として運動方程式の中に現われるだけであるから，これを消去することは特に簡単である．実際，運動方程式の1つ，p.86（3－8）式は，単に，t の微小な変化 dt と，それに対応する θ の変化 $d\theta$ の間の一定の関係を与えるものである．すなわち，

$$l\,dt = mr^2\,d\theta \qquad (3-31)$$

である．これに対応して，t および θ に関する微分演算子の間の関係は，

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta} \qquad (3-32)$$

で与えられる．これらの関係は，運動方程式（3－12）を，軌道に対する別の異なった微分方程式に変えるために利用することができる．あるいは，これらの関係を，（3－17）式で与えられる運動方程式の形式的な解に適用して，軌道の方程式を直接求めることもできる．さし当り，この2つの可能性のうち，前の方のやり方に従うことにしよう．

（3－32）式から，t に関する2階導関数は，

$$\frac{d^2}{dt^2}=\frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\right),$$

と書くことができる．したがって r に対する Lagrange の方程式（3－12）は，

$$\frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right)-\frac{l^2}{mr^3}=f(r)\,, \qquad (3-33)$$

となる．さて，（3－33）式を簡単化するために，

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=-\frac{d(1/r)}{d\theta}$$

であることに注意しよう．したがって，変数を $u=1/r$ に変えると，

$$\frac{l^2u^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-f\left(\frac{1}{u}\right), \qquad (3-34\,\mathrm{a})$$

が得られる．

$$\frac{d}{du}=\frac{dr}{du}\frac{d}{dr}=-\frac{1}{u^2}\frac{d}{dr},$$

であるから，（3－34 a）式は，ポテンシャルを用いて，別の形，

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{m}{l^2}\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right) \qquad (3-34\,\mathrm{b})$$

と書くことができる．こうして，方程式（3－34 a）または（3－34 b）のどちらの形でも，力の法則 f あるいはポテンシャル V がわかっていれば，軌道に対する微分方程式を与えることになる．逆に，もし軌道の方程式がわかっているならば，すなわち r が θ の関数としてわかっているならば，（3－34）から逆に計算して，力の法則 $f(r)$ を求めることができる．

しかし，ここではもう少し一般的な結果を求めたい．例えば，（3－34）式

から，軌道が回帰点に関して対称であることを示すことができる．これを証明
p.87
するために，もし軌道が対称であれば，回帰角の方向に関する軌道の鏡映（reflection）を行っても何の変化も起こらないはずであることに注意しよう．回帰点が $\theta=0$ の方向にあるように座標を選んでおけば，数学的には θ を $-\theta$ に置き換えることによって，鏡映の結果が得られる．軌道に対する微分方程式（3－34）は，明らかにそのような置換に対して不変である．さらに，この場合の初期条件，

$$\theta=0,\quad \text{に対して}\quad u=u(0),\qquad \left(\frac{du}{d\theta}\right)_0=0,$$

も，同じようにこの置換によって変わらない．したがって軌道の方程式は，θ あるいは $-\theta$ のどちらで表わしても同じでなければならない．これが求めていた結論である．**それゆえ，軌道は，アプス・ベクトル（*apsidal vectors*）に関する鏡映に対して不変である．** このことは，事実上，任意の2つの回帰点の間にある軌道の部分がわかれば，その全体を追跡することができる，ということを意味する．与えられた部分を，1つのアプス・ベクトルに関して鏡映すれば，この隣りに延びている軌道の部分が得られる．図3－12に示してあるように，この手続きは，残りの軌道が全部得られるまで，何回でも繰り返すことができる．

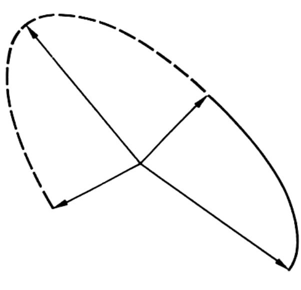


図3－12
アプス・ベクトルに関する鏡映による軌道の延長．

ある特定の力の法則が与えられたときに，実際の軌道の方程式を求めるためには，微分方程式（3－34 a）か（3－34 b）のどちらかの形の式を積分しなければならない．しかし，この積分の大部分は，すでに運動方程式（3－12）を解くときに済ましてあるから，これを全部詳しくやる必要はない．残っているのは，（3－31）式を使って，解（3－17）から t を消去することだけである．その結果は，

$$d\theta = \frac{l\,dr}{mr^2\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - V(r) - \dfrac{l^2}{2mr^2}\right)}}, \tag{3－35}$$

となる．少し整理して書き直すと，（3－35）式の積分は，

$$\theta = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\dfrac{2mE}{l^2} - \dfrac{2mV}{l^2} - \dfrac{1}{r^2}}} + \theta_0 \quad , \tag{3－36}$$

p.88
となる．あるいは，積分変数を $u = 1/r$ に変えると，

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\dfrac{2mE}{l^2} - \dfrac{2mV}{l^2} - u^2}} \quad , \tag{3－37}$$

となる．

運動方程式の場合と同じように，方程式（3－37）は問題を形式的には解いたことになっているけれども，必ずしも実際に使える解であるとは限らない．なぜなら，この積分は，よく知られた関数では表わせない場合がしばしばあるからである．実際，いくつかの特定の型の力の法則の場合が研究されているだけである．最も重要なのは，V が r のべき関数，

$$V = ar^{n+1}, \tag{3－38}$$

であり，したがって力が r の n 乗で変わる場合である*．このポテンシャルに対

*）$n = -1$ の場合は以下の議論から除かなければならない．この場合には，（3－38）式は，一定のポテンシャル，すなわち力が全く作用しない場合に対応することになる．この指数を力の法則に直接用いて力が r^{-1} で変わるとしても，やはり異常な場合になる．それは r^{-1} で変わる力は，対数ポテンシャルに対応し，べき関数ポテンシャルとは全く異なるからである．対数ポテンシャルは，1点のまわりの運動の場合に現われることは稀であって，むしろ力の源が線状をなしている場合に特有なものである．

しては，（3－37）式は，

$$\theta=\theta_0-\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{\dfrac{2mE}{l^2}-\dfrac{2ma}{l^2}u^{-n-1}-u^2}} \qquad (3-39)$$

となる．この積分もまた，簡単な関数で表わされるのは，ある特定の場合に限る．もし，根号の中の量が，u に関して2次より高次でなければ，分母は $\sqrt{\alpha u^2+\beta u+\gamma}$ の形になるから，この場合の積分は直ちに円関数[1]（circular functions）で表わすことができる．この制限は，

$$-n-1=0,1,2,$$

の条件と同等である．あるいは $n=-1$ の場合を除けば，

$$n=-2,-3,$$

となる．これは逆2乗あるいは逆3乗の法則に従う力に相当する．もう1つの容易に積分できる場合は，$n=1$，すなわち1次力（linear force）の場合である．なぜなら，この場合（3－39）式は，

$$\theta=\theta_0-\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{\dfrac{2mE}{l^2}-\dfrac{2ma}{l^2}\dfrac{1}{u^2}-u^2}} \qquad (3-39')$$

と書くことができ，これに次のような置換，

$$u^2=x, \qquad du=\frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

p.89
を行うと，（3－39′）式は，

$$\theta=\theta_0-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2mE}{l^2}x-\dfrac{2ma}{l^2}-x^2}}, \qquad (3-40)$$

となって再び求めている形になるからである．したがって簡単な関数による解は，べき指数が，

1）普通三角関数（trigonometric functions）という．

$$n = 1, -2, -3$$

の場合に対して得られる．このことは，これ以外のべき関数に対しては積分ができないという意味ではない．ただその場合には，積分がよく知られている関数にはならないというだけである．例えば，べき指数nのある範囲では，(3−39)式は**楕円積分**(elliptic integrals)を含み，解が**楕円関数**(elliptic functions)で表わされる[1]．

楕円積分は，

$$\int R(x, \omega)\, dx,$$

によって定義される．ただし，Rはxおよびωの任意の有理関数(rational function)で，ωは，

$$\omega = \sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \eta}\ ,$$

で定義される．もちろん，αとβは同時に零になることはできない．なぜなら，その場合には，この関数は円関数(三角関数)で表わされるからである．このような積分はいつでも円関数，Legendre の第1種，第2種および第3種楕円積分[1]を含む形に変形されることを証明することができる(Whittaker and Watson, *Modern Analysis*, 4th ed., p.512)．これらの標準的な楕円積分に

---

1) Legendre-Jacobiの楕円積分ともいう．n, k を定数とするとき，$(1 > k > 0)$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad \text{が第1種,}$$

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\, dz \qquad \text{が第2種,}$$

$$\int \frac{dz}{(z^2-n^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad \text{が第3種,}$$

の楕円積分である．この第1種の楕円積分の逆関数が，Jacobi の楕円関数と呼ばれるものである．楕円関数とは，一般に2重周期を持つ1価解析関数で，数平面上の有限な部分においては極以外の特異点を持たないものの総称であって，Jacobi の楕円関数のほかにも，いろいろな楕円関数がある．楕円積分は，すべて，初等関数とこのような楕円関数で表わすことができる．なお，楕円積分という名称は，長半径a，離心率e の楕円の周の長さが，$4a\int_0^a \sqrt{(1-e^2x^2)/(1-x^2)}\,dx$ で第2種楕円積分になることから起こったものである．

ついては完全な詳しい表がある．またその性質や，楕円関数との関係は，文献で余す所なく論じられている．それらを利用するためには，本質的には，何等円関数に対する場合よりも高度な論理的概念を必要としない．ただ楕円関数は円関数ほど親しまれていないというだけである．定義によって，もし，

$$n = -4, -5 ,$$

であるならば，（3－39）式の積分は楕円関数を用いて表わされることがわかる．ρ をある未定の指数とするとき，この積分の分母と分子に u^ρ を掛ければ，同じく楕円積分に導かれる別の形に変えることができる．このようにすると，積分は，

$$\int \frac{u^\rho\, du}{\sqrt{\dfrac{2mE}{l^2}u^{2\rho} - \dfrac{2ma}{l^2}u^{-n-1+2\rho} - u^{2(\rho+1)}}},$$

となる．この根号の中の式は，$\rho = 1$ である場合のほかは，4次より高次の多項式になる．したがってこの積分は，

$$-n - 1 + 2 = 0, 1, 2, 3, 4 ,$$

p.90

あるいは，

$$n = +1, 0, -1, -2, -3 ,$$

であるときに限って，楕円積分以上の厄介なものにはならない．$n = +1, -2, -3$ に対しては解は円関数になる．また $n = -1$ の場合は，すでに取り除いている．したがって，この方法は，$n = 0$ の場合に限って楕円関数を与える．

ある場合には，変数を $u^2 = x$ に変えることによって，ふたたび楕円型の積分が得られる．この置き換えをすると，問題の積分は，

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2mE}{l^2}x - \dfrac{2ma}{l^2}x^{(1-n)/2} - x^2}},$$

となり，

$$\frac{1-n}{2} = 3, 4 ,$$

に対して楕円型となる．この場合の指数は，

$$n = -5, -7$$

となる．

最後に，ふたたび，上に得られた積分の分母と分子に x を掛けるという手が使える．このような手続きで，楕円積分またはそれより簡単な積分が得られるための条件は，

$$\frac{1-n}{2} + 2 = 0, 1, 2, 3, 4 ,$$

あるいは，

$$n = +5, +3, +1, -1, -3 ,$$

である．このうち，$n = +5, +3$ だけが新しい場合である．したがって，楕円関数に導かれる整数の指数は，全部で，

$$n = +5, +3, 0, -4, -5, -7 ,$$

だけあることになる．これで楕円積分に導かれる整数指数のすべてが尽くされているのであるが，適当な変換をすれば，分数の指数のうちのあるものも楕円積分に導かれることを証明することができる．

3−6　閉軌道についての条件 (Bertrand の定理)

我々は，等価な 1 次元問題または軌道方程式から，運動について陽に解かないで得られるすべての知識をまだ引き出してはいなかった．特に，**閉軌道**(*closed orbits*)となる引力の中心力の型についての，強力でかつまた思考を啓発してくれるような，定理を導き出すことが可能である．ここで，閉軌道とは，質点が結局はその軌跡をふたたびたどるような軌道である．

p.91
1 種の閉軌道，すなわち力の中心のまわりの円軌道に対しては，すでに閉軌道となるための条件が述べられた．すなわち，任意の与えられた l に対して，もし等価ポテンシャル $V'(r)$ が，ある距離 r_0 で最小または最大値をもち，かつエネルギー E がちょうど $V'(r_0)$ に等しいならば，円軌道が得られる．V' が極

値をもつという要請は，r_0 で f が零であるという要請と同等である．これは以前に導いた条件（102ページ参照）．

$$f(r_0) = -\frac{l^2}{mr_0^3}, \qquad (3-41)$$

となる．このことは，円軌道が可能であるためには，力が引力でなければならないことを示している．さらに，質点のエネルギーは，

$$E = V(r_0) + \frac{l^2}{2mr_0^2}, \qquad (3-42)$$

で与えられなければならず，そのことは，（3－15）式によって，円軌道に対して $\dot{r}=0$ という要請に対応している．（3－41）式と（3－42）式は，両方共初等的であり，かつよく知られたものである．もし，角運動量 l が（3−41）式で与えられ，質点のエネルギーが（3－42）式で与えられるならば，それらは任意の引力の中心力に対して，ある勝手な半径 r_0 において円軌道をもつことが可能であるということを意味する．

円軌道の特性は，V'の極値が図3－8のように極小であるか，または図3－9のように極大であるかに関係する．もし，エネルギーが，ある与えられた l の値において，円軌道に対して必要とされるエネルギーよりもわずかに大きいならば，そのとき，V'の極小に対して，運動はもはや円軌道ではないけれども，なお有界な運動となるであろう．しかしながら，V'が最大となるならば，そのとき円運動のエネルギーよりもEをわずかでも大きくすると，（3－34）式は，図3－9に示されるポテンシャルに対して，質点は力の中心を通り，かつ無限遠へと動くような，有界でない運動となる．静的平衡の場合の用語を借りてくれば，図3－8において現われる円軌道は**安定**（*stable*）であるといわれる．また，図3－9において現われる軌道は**不安定**（*unstable*）であるといわれる．円軌道の安定性は，このように円の半径の所での V' の2階導関数の符号によって決定される．すなわち，正の2階導関数（このとき V' は下に凸）に対して，円軌道は安定であり，また上に凸な V' に対しては不安定である．だから，もし，

$$\left.\frac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r=r_0} = -\left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_0} + \frac{3l^2}{mr_0^4} > 0,$$

であるなら，安定な軌道となる．この条件は，（3－4）式の条件を使って，

$$\left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_0} < -\frac{3f(r_0)}{r_0}, \qquad (3-43)$$

または，

$$\left.\frac{d\ln(-f)}{d\ln r}\right|_{r=r_0} > -3, \qquad (3-43')$$

と書き直せる．もし力が，円軌道の半径 r_0 の近傍において，r のべき法則

$$f = -\frac{k}{r^{n+1}},$$

p.92
のように振舞うならば，そのとき安定条件（3－43）式は，

$$\frac{(n+1)k}{r_0^{n+2}} < \frac{3k}{r_0^{n+2}},$$

すなわち，

$$n < 2, \qquad (3-44)$$

となる．$1/r^2$よりもゆっくり変化する，べき法則の引力ポテンシャルは，このように r_0 のすべての値に対して，安定な円軌道をとることができる．

もし円軌道が安定であるならば，その時質点のエネルギーが少し増加して，円軌道に対するエネルギーよりも大きくなると，r_0 のまわりに r がわずかに変化するだけである．そのような小さな円軌道からのずれに対して，質点は u_0 のまわりに $u(\equiv 1/r)$ についての単振動を行うことを示すことができる，すなわち，

$$u = u_0 + a\cos\beta\theta, \qquad (3-45)$$

となる（付録A参照）．ここで a は円軌道に対するエネルギー値からのずれに依存している振幅であり，β は力の法則 $f(r)$ の円軌道の半径 r_0 のまわりの Taylor 級数展開から生ずる1つの量である．付録Aにおいて，β は，

$$\beta^2 = 3 + \frac{r}{f}\frac{df}{dr}\bigg|_{r=r_0}, \qquad (3-46)$$

で与えられることが示される．質点の動径ベクトルが，平面上をめぐって完全に掃引するにつれて，u はその振動の β サイクルだけ変化する（図3—13参照）．

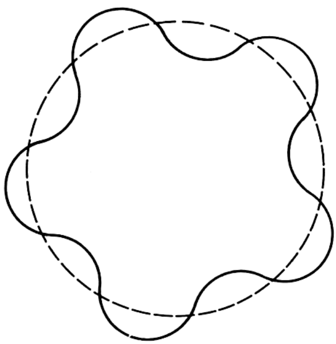


図 3—13
円軌道からわずかにはずれた，中心力の場における運動の軌道．

もし β が有理数，すなわち2つの整数の比 p/q であるならば，動径ベクトルが q 回転した後，軌道は自分自身の軌跡をふたたびたどり始める．すなわちこの場合には軌道は**閉じる**であろう．

不等式（3−43）が満たされるような各 r_0 の値において，（3−41）式および（3−42′）式によって定められた，エネルギーと角運動量の初期値を質点に与えることによって，安定な円軌道を作りあげることができる．これらの円軌道
p.93
のまわりに，わずかに摂動を与えられた軌道が閉軌道であるためには，力の法則はどのような形をとらねばならないかということについての問題が当然生じてくる．これらの条件の下では，β は有理数であるのみならず，円軌道が可能であるすべての距離において，**同じ**有理数でなければならないことは明らかである．もしそうでなければ，β はとびとびの値のみを取ることができるので，振動の周期の数は r_0 によって不連続的に変化する．そして実際，軌道はその不連続な点においては閉じることができないであろう．至る所で一定である β^2

に対しては，β^2 を定義する（3－46）式は，実質的に独立変数 r_0 に関して，力の法則 f に対する微分方程式になる．安定な円軌道が可能である r の範囲についてのみ，（3－46）式が成立する，ということに留意すれば，実際（3－46）式を r を用いて書かれたものと考えることができる．（3－46）式を少し整理すれば，

$$\frac{d\ln(-f)}{d\ln r}=\beta^2-3, \tag{3－47}$$

となる．これはすぐに積分することができて，力の法則

$$f(r)=-\frac{k}{r^{3-\beta^2}}, \tag{3－48}$$

を与える．円軌道を定義する条件とわずかに異なっている初期条件に対して，β が有理数であるときこの形の力の法則はすべて閉じた安定軌道を与える．逆2乗法則 $(\beta\equiv1)$ のような，いくつかのよく知られた力が，（3－48）式によって許される可能な範囲内に含まれている．しかし，もちろん $f=-kr^{-2.9}$，$(\beta=\frac{5}{3}$ のとき）のような他の多くの力の振舞もまた許される．

円軌道に対する要請から，初期条件がわずかではなく大きくはずれると仮定しよう．同じこれらの力の法則は，まだやはり閉軌道を与えるであろうか？この問題には，力の法則のTaylor 級数展開に付加項を加えて，その結果得られる軌道方程式を解くことによって，直ちに答えることができる．含まれる計算は，初等的なものであるがいくらか長たらしい．その詳細は付録Aに述べられている．これからわかることは，円軌道からの1次のオーダーより高次のずれに対しては，軌道は $\beta^2=1$ と $\beta^2=4$ のときにのみ軌道が閉じているということである．β^2 のこれらの値のうちの最初のもの（すなわち $\beta^2=1$）は，（3－48）式からよく知られた引力の逆2乗法則となる．第2のもの（すなわち $\beta^2=4$）は動径距離に比例する引力，すなわちHooke の法則である！これらの力の法則が，そしてこれらの力の法則のみが，恐らくは任意の l と $E(E<0)$ の組み合わせに対して閉軌道を生じさせることができるであろう．そして，実際に軌道方程式を直接解くことによって，そのような力の法則のみが閉軌道を作ることを知ることができる．したがって，**すべての束縛された粒子が閉軌**

道とする中心力は，逆2乗法則とHookeの法則のみである．＊

これは，面倒な代数計算をする十分な価値のある1つの顕著な結果である．束縛されている天体が，第1近似で閉軌道上を動くということは，天文学的観p.94測ではありふれたことである．他の天体が存在することによる摂動のための閉軌道からの小さなずれは，多くの場合に計算することができる．我々が，太陽系のみを考えようと，あるいは十分に調べられた真の2連星の多くの例を捜そうと，閉軌道が最も普通であることは事実である．さて，どんな距離でも成り立つHooke の法則は，最も現実的でない力の法則である．というのは，それは力が無限遠まで際限なく大きくなることを意味するからである．このようにして，初期条件の広い範囲にわたって，閉じた軌道が存在することから，万有引力は距離の逆2乗によって変化するという結論が導かれる．例えば，万有引力の法則に到達するために，軌道が楕円であるという性質を使うことは必要ではない．

われわれは，この結論を少し異なったやり方，すなわち，いくらか近代物理学において意味のあるやり方で述べることができる．平面内の軌道運動は，2つの振動運動，すなわち動径距離 r の振動と角度 θ の振動の合成されたものとみなされる．軌道が閉じているということは，この2つの振動の周期が等しいということと同等である．すなわち，この2つの振動の周期は**縮退している**．したがって，**重力場の中での軌道の縮退の特徴から，力の法則の形を決めることができる．**あとで，縮退とポテンシャルの性質との間の関係についての他の定式化に出会うであろう．

3−7　Keplerの問題，逆2乗の法則に従う力

逆2乗の法則に従う力は，すべての中心力のうちで，最も重要なものであって，詳しく取り扱っておく価値がある．この場合には，力とポテンシャルは次のように書くことができる．

＊) この結論は明らかに最初J.Bertrand, *Comptes Rendus* 77, 849−853 (1873) によって導かれた．これはしばしばBertrand の定理といわれる．この章末にある他の関連する文献を見よ．

$$f = -\frac{k}{r^2}, \qquad V = -\frac{k}{r}, \tag{3-49}$$

この場合には，軌道に対する方程式を積分するのに，いくつかの方法がある．最も簡単な方法は，（３－49）を軌道に対する微分方程式（３－34）に代入することである．すなわち，

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-mf\left(\dfrac{1}{u}\right)}{l^2u^2} = \frac{mk}{l^2}, \tag{3-50}$$

とする．変数を $y = u - \dfrac{mk}{l^2}$ に変えると，この微分方程式は，

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0,$$

となって，解，

$$y = B\cos(\theta - \theta'),$$

が直ちに得られる．B と θ' が２つの積分定数である．r で表わすと，この解は，

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(1 + e\cos(\theta - \theta')), \tag{3-51}$$

p.95
となる．ここで，

$$e = B\frac{l^2}{mk}, \tag{3-52}$$

とおいた．

軌道の方程式を，形式的な解（３－39）からも求めておくと有益である．この方法は，微分方程式（３－50）を単に積分するよりも冗長ではあるが，重要な積分定数 e が，自動的に，系のエネルギー E と角運動量 l で表わされるという利点がある．ここでは，（３－39）の積分を不定積分にとって，

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\dfrac{2mE}{l^2} + \dfrac{2mku}{l^2} - u^2}}, \tag{3-53}$$

の形に書こう．（３－53）に現われる量 θ' は，初期条件によって定められる

積分定数であって，必ずしも時刻 $t=0$ における最初の角 θ_0 と同じではない．上の不定積分はつぎのような標準型をしている*.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos - \frac{\beta+2\gamma x}{\sqrt{q}}, \qquad (3-54)$$

ただし，

$$q = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

である．これを（３－53）式に適用するためには，

$$\alpha = \frac{2mE}{l^2}, \qquad \beta = \frac{2mk}{l^2}, \qquad \gamma = -1,$$

とおかなければならない．したがって，判別式 q は，

$$q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1+\frac{2El^2}{mk^2}\right)$$

となる．これらの置き換えを行うと，方程式（３－53）は，

$$\theta = \theta' - \arccos \frac{\dfrac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1+\dfrac{2El^2}{mk^2}}},$$

p.96

となる．最後に $u \equiv \dfrac{1}{r}$ について解けば，軌道の方程式は，

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}\cos(\theta-\theta')\right) \qquad (3-55)$$

であることがわかる．これは，e が E および l で表わされている点を除けば，（３－51）式と一致している．方程式（３－55）から，積分定数 θ' は，軌道の回帰角（ turning angles ） の１つと同じであることが確かめられる．軌道の

*）例えば，B. O. Pierce, *A Short Table of Integrals*, 3rd ed. no. 161, 4th. ed. no. 166 参照．また I.S. Gradshtein and I.W. Ryzhik, *Table of Integrals*, no. 2.261， または，M.R Spiegel, *Mathematical Handbook* no. 14．280 を見よ．（これらの書物の 完全な解説については参考文献一覧（下巻）の“Works of Reference”の項を見よ．）（３－45）式を得るためには，これらの積分の表のすべてに与えられている結果に $-\pi/2$ を加えなければならないが，これは不定積分であるからさしつかえない．

方程式の中には，４つの積分定数のうち３つしか表われないことに気がつくであろうが，これはいつでも軌道に固有な性質である．実際第４番目の定数は，軌道上における質点の最初の位置を決めるものであって，軌道の方程式だけに関心を持つ場合には，それを知ることは明らかに必要ではない．そのために答の中には現われないのである．もちろんこの定数は，r と θ を時間 t の関数として求めて解を完成したい場合には与えてやらなければならない．例えば，角運動量に対する保存則，

$$mr^2\,d\theta = l\,dt\ ,$$

を，（３－55）式を用いて積分する方法をとる場合には，以上のほかに最初の角 θ_0 を別に指定しなければならない．

さて，原点を１つの焦点とする円錐曲線（conic section）の一般の方程式は，

$$\frac{1}{r} = C(1 + e\cos(\theta - \theta')), \tag{3-56}$$

である．ここで e は円錐曲線の離心率（eccentricity）である．方程式（３－55）と比べると，軌道は常に円錐曲線であって，その離心率は，

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}, \tag{3-57}$$

であることがわかる．軌道の性質は，つぎの分類表によって，e の大きさに関係する．

$e > 1,\quad E > 0:$　双曲線

$e = 1,\quad E = 0:$　放物線

$e < 1,\quad E < 0:$　楕円

$e = 0,\quad E = -\dfrac{mk^2}{2l^2}:$　円．

この分類は，等価な１次元ポテンシャル V' のエネルギー図に基づく軌道の定性的な議論と一致している．円運動に対する条件は，ここではいくらか異なった形で現われているけれども，円運動に対する前の条件の結果として容易に導くことができる．円軌道に対しては，T および V は時間的に一定であるから，

ビリアル定理から，

$$E \equiv T + V = -\frac{V}{2} + V = \frac{V}{2},$$

p. 97
となり，したがって，

$$E = -\frac{k}{2r_0}, \tag{3-58}$$

である．しかし，（3－41）式，すなわち中心力と“有効力”とがつりあうことから，

$$-\frac{k}{r_0^2} = -\frac{l^2}{mr_0^3},$$

すなわち，

$$r_0 = \frac{l^2}{mk}, \tag{3-59}$$

となる．この軌道半径の式から，（3－58）式は，

$$E = -\frac{mk^2}{2l^2},$$

となり，円運動に対する上の条件が得られる．

楕円軌道の場合には，その長軸（major axis）は，エネルギーだけに関係することを示すことができる．この定理は，原子に関するBohr の理論においてかなり重要である．半長軸（semimajor axis）は2つのアプス距離 r_1 と r_2 の和の半分である（図3－6参照）．定義によって，動径速度はこれらの点で零となり，エネルギーの保存から，アプス距離は，方程式

$$E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} = 0,$$

すなわち，

$$r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{l^2}{2mE} = 0, \tag{3-60}$$

の根であることを意味する．さて，2次方程式の1次の項の係数が，根の和に負号をつけたものであるから，半長軸は，

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{k}{2E}, \qquad (3-61)$$

で与えられる．楕円が円となる極限においては，(3−61)式は，(3−58)式と一致することを注意しておこう[1]．半長軸を用いて，楕円の離心率は，

$$e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{mka}}, \qquad (3-62)$$

と書ける（この関係式は後の章で使われるであろう）．さらに（3−62）式から

$$\frac{l^2}{mk} = a(1 - e^2), \qquad (3-63)$$

p.98
が得られ，これによって楕円軌道の方程式（3−51）式は，

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \theta')} \qquad (3-64)$$

と書かれる．（3−64）式から，2つのアプス距離（それらは $\theta - \theta' = 0$と π のときに現われる）は，$a(1 - e)$ と $a(1 + e)$に等しいことが導かれる．このことは，楕円の性質から予期されていたことである．

3−8　Kepler問題における運動の時間的記述

このように，逆2乗の中心力に従う運動の軌道の方程式は，かなり真正直な方法で解くことができて，簡単な閉じた式で表わされる結果が得られる．質点が軌道上を動いて行くとき，その運動の時間的記述をすることは，しかしながらそれに比べてかなり複雑な事柄である．原理的に，（ある出発点に対する）質点の動径距離 rと時間との関係は，方程式（3−18）によって与えられる．それは，ここでは，

1）このために，原子内の電子に対して，楕円軌道を考えても，その半長軸に対して，円軌道の半径に対するものと同じ量子条件を適用することによって，円軌道の場合と同じエネルギー準位が得られることになるのである．詳しいことは，原子物理学の教科書を参照せよ．

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} + E}}, \qquad (3-65)$$

となる．同様に，極角 θ と時間とは，角運動量の保存から，

$$dt = \frac{mr^2}{l} d\theta,$$

と関係づけられる．それは，軌道の方程式（３－51）と組み合わされて，

$$t = \frac{l^3}{mk^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{[1 + e\cos(\theta - \theta')]^2}, \qquad (3-66)$$

となる．これらの積分のどちらも，初等関数によって積分することができる．((３－66)式に対しては，例えば，*Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, ed.by M.R.Spiegel の公式 14. 391 を見よ）．しかし，その関係は大変複雑で，特に天文学的観測に必要とされる高精度が望まれるときには， r または θ を t の関数として与える反転公式を求めることは，手に負えぬほど厄介な問題となる．

このような複雑な事情のいくつかを例示するために，放物線運動 $(e = 1)$ の場合を考察しよう．この場合には，積分を最も簡単に行うことができるからである．最近接点での動径ベクトルから見た平面上の極角を測定するのが通例である．ここで最近接点というのは，**近日点**（*perihelion*）* として最も普通に名付けられている点である．この規約は軌道の方程式（３－51）において，θ' を零ととるということに対応している．したがって，時刻は近日点の通過の瞬間 T から測られる．三角法の恒等式

p.99

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2},$$

*) 文字通りの意味では，この用語は太陽のまわりの軌道に対してのみに限られるべきであろう．最も一般的な用語は**最近点**（*periapsis*）である． しかし，力の中心がどこにあろうとも，近日点という用語を使うのが通例になっている．月のまわりを回る宇宙船に対してさえも，軌道パラメーターの公式的記述には，近日点という用語が使われている．この場合に，近月点 (pericynthion)）という用語は，あまりに衒学的な用語であろう．

を使って，（3－66）式は，そのとき，放物線運動に対して，

$$t = \frac{l^3}{4mk^2}\int_0^{\theta} \sec^4\frac{\theta}{2}d\theta,$$

という形になる．この積分は，$x = \tan(\theta/2)$ という変数の変換によって容易に実行できて，

$$t = \frac{l^3}{2mk^2}\int_0^{\tan(\theta/2)} (1 + x^2)\,\mathrm{d}x$$

すなわち，

$$t = \frac{l^3}{2mk^2}\left(\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}\right), \qquad (3-67)$$

となる．これは θ の関数としての t に対する真正直な関係である．ある与えられた時刻における θ を求めるための式を得るには，$\tan(\theta/2)$ についての 3 次方程式を解き，さらに対応している逆正接（arctan）を求めることが必要になる．その与えられた時刻における動径方向の距離は，軌道の方程式によって与えられる．

楕円運動に対して，（3－65）式は，**離心近点離角**（*eccentric anomaly*）*と名付けられ，関係式，

$$r = a(1 - e\cos\psi) \qquad (3-68)$$

によって定義される補助変数 ψ によって最も便利に積分される．軌道の方程式（3－64）と比較すれば，θ が完全に 1 回転するとき，ψ は 0 から 2π の値をとり，$\psi = 0$（そこでは規約により $\theta = 0$）では近日点となり，$\psi = \pi = \theta$ では遠日点（aphelion）となることは明らかである．ψ に対して幾何学的意味を与えることができるが，それは歴史的な興味があるだけである（例えば，Mc-Cuskey, *Introduction to Celestial Mechanics*, p.45 を見よ）．E と l を，a, e, および k によって表わせば，（3－65）式は楕円運動に対して，

*）この名前は，θ が**真近点離角**（*true anomaly*）と呼ばれた中世天文学の用語と関連している．

$$t = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}}, \qquad (3-69)$$

と書くことができる．ここで，出発時刻についての規約によって，r_0 は近日点の距離である．ψ によって表わされた r の関係式（３－68）を代入すれば，この積分はちょっと計算した後，簡単な形
p.100

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int_0^{\psi} (1 - e\cos\psi)\,d\psi\,, \qquad (3-70)$$

となる．

もしその積分が ψ の全領域 2π にわたって行われるならば，まず（３－70）式は楕円運動の周期 τ に対する式を与えることに気づくであろう．

$$\tau = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (3-71)$$

この重要な結果は，直接に楕円の性質からも引き出すことができる．角運動量が保存されることから，面積速度は一定であって，

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{l}{2m} \qquad (3-72)$$

で与えられる．軌道の面積 A は，（３－72）式を１周期 τ にわたって積分すれば求められるはずである．すなわち，

$$\int_0^{\tau} \frac{dA}{dt}\,dt = A = \frac{l\tau}{2m}$$

である．ところで，楕円の面積は，

$$A = \pi ab$$

である．ここで，離心率の定義によって，半短軸（semiminor axis）b は a と次の式で関係づけられる．

$$b = a\sqrt{1 - e^2}\,.$$

（３－62）式によれば，半短軸はまた，

$$b = a^{1/2}\sqrt{\frac{l^2}{mk}},$$

と書けることがわかる．したがって，周期は，前に求めたように，

$$\tau = \frac{2m}{l}\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{l^2}{mk}} = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{k}},$$

となる．（3−71）式は，他の条件が同じであれば，周期の2乗が半長軸の3乗に比例することを表わしている．この結論はしばしば Kepler の第3法則とp.101呼ばれる*. 実際には，Kepler が関心を持ったのは，太陽の引力場における惑星の運動という特定の問題であった．したがって，彼の法則をもっと正確に述べると次のようになるであろう．すなわち，各惑星の周期の2乗は，その軌道の半長軸の3乗に比例する．この形の法則はただ近似的に正しいだけである．ここで，太陽のまわりの惑星の運動は2体問題であって，（3−71）式の中の m は，換算質量，

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

で置き換えなければならないことを思い起こす必要がある．上の式で，m_1 は惑星の質量，m_2 は太陽の質量と考えてよい．さらに，万有引力の法則は，

$$f = -G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

であるから，定数 k は，

$$k = Gm_1 m_2, \tag{3-73}$$

である．これらの条件の下で，太陽の質量に対して惑星の質量を無視すると，（3−71）式は，

---

*) 惑星の運動に関する Kepler の3つの法則は，1610年頃に発表されたもので，惑星の観測の先駆者的な分析の結果であり，Newton の偉大な前進の土台となった．第2法則，すなわち面積速度の保存則は，前に注意したように，中心力運動に対する一般的な法則である．しかし，第1法則 — 惑星は太陽を1つの焦点とする楕円軌道を描いて運動する — ，および第3法則は，特に力が逆2乗法則に従う場合に限られる．

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \approx \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_2}}, \qquad (3-74)$$

となる．Kepler の第3法則と呼ばれるものは，（3－74）式の近似的な翻訳である．なぜなら，この法則は，すべての惑星に対して，同じ比例定数を用いてτが$a^{3/2}$に比例するということを述べているからである．しかし，惑星の質量m_1は太陽の質量m_2に対して，いつでも完全に無視できるというわけではない．例えば，木星の質量は，太陽の質量の約0.1％である．他方，Bohr 原子における電子軌道に対しては，μ およびkは，与えられたすべての軌道に対して同じ値を持つから，Kepler の第3法則は厳密に正しい．

1つの楕円軌道に対する位置の時間的変化の一般的問題に戻るために，回転の角振動数ωを，

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{k}{ma^3}} \qquad (3-75)$$

のように導入することによって，（3－70）式を少し書き換えることができる．（3－70）式の積分はもちろん容易に実行できて，

$$\omega t = \psi - e\sin\psi, \qquad (3-76)$$

となり，これはKepler の方程式という名で知られたものである．ωt という量は，軌道上で完全に1回転するとき，ψ，θと共に0から2πまで動く．したがって，近点離角（anomaly），特に，**平均近点離角**（*mean anomaly*）と名づけられている．

ある与えられた時刻tにおける軌道中での位置を求めるために，Kepler の方程式（3－76）は，対応する離心近点離角ψを得るように，まず逆に解かれるであろう．（3－68）式は，そのとき動径距離を与えるが，一方極角θは，p.102定義式（3－68）と軌道の方程式（3－64）を比較することによって，ψで表わすことができる．すなわち，

$$1 + e\cos\theta = \frac{1 - e^2}{1 - e\cos\psi},$$

となる．少し代数計算をすると，これは簡単化することができて，

$$\cos\theta = \frac{\cos\psi - e}{1 - e\cos\psi}, \qquad (3-77)$$

となる．順次，（3－77）式の両辺を1に加えたり，1から引算したりし，その結果得られる2つの方程式の比をとることによって，もう1つの別の形，

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\psi}{2}, \qquad (3-78)$$

となる．したがって，方程式（3－77）または（3－78）は，もし ψ がわかることになれば，θ を与えることができる．ある与えられた時刻に対応する ψ の値を与えるために，超越Kepler方程式（3－76）を解くという問題は，17世紀初頭にKepler が問題を提起して以来，多くの有名な数学者の注意を引いた問題である．例えば，Newton は今日アナログ解（analog solution）と呼ばれているものの研究に寄与した．離心率の全領域にわたって，角度1秒までの精度でKepler の方程式を解くという実際的な必要性から，18世紀と19世紀の数値解析の多くの発展がなされたといってよいであろう．コンピューター以前の時代において発展させられた100を越える解法のいくつかは，この章の演習問題の中で考察されるであろう．

3－9　Laplace-Runge-Lenz ベクトル

Kepler の問題はまた，角運動量以外の付加的な保存ベクトルが存在するということによって特徴づけられる．一般的な中心力に対して，Newton の運動の第2法則は，ベクトル的に，

$$\dot{\mathbf{p}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad (3-79)$$

のように書かれる．したがって，一定の角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ と $\dot{\mathbf{p}}$ とのベクトル積は，

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} &= \frac{mf(r)}{r}[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] \\ &= \frac{mf(r)}{r}[\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) - r^2\dot{\mathbf{r}}],\end{aligned} \qquad (3-80)$$

のように展開できる．（3－80）式は，

$$\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})=r\dot{r}$$

p.103
である（すなわち，より形式ばらない言い方でいえば，動径方向の速度の成分は $\dot{r}$ である）ことに注意することによって，さらに簡単化される．ベクトル $\mathbf{L}$ は一定であるから，少し変形した後に（3－80）式は，

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L})=-mf(r)r^2\left[\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r}-\frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2}\right],$$

すなわち，

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L})=-mf(r)r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right), \tag{3-81}$$

と書き直される．$f(r)$ の具体的な形を決めてやらないと，これ以上進むことはできない．しかし，（3－81）式は，もし $f(r)$ が r^2 に逆比例するKepler の問題のときには，直ちに積分することができる．そのとき，$f(r)$ を（3－49）式によって定められた形に書けば，（3－81）式は，

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L})=\frac{d}{dt}\left(\frac{mk\mathbf{r}}{r}\right),$$

となり，それはKeplerの問題に対しては，

$$\mathbf{A}=\mathbf{p}\times\mathbf{L}-mk\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{3-82}$$

によって定義される**保存ベクトル**（*conserved vector*）$\mathbf{A}$ が存在することを意味する．最近，ベクトル $\mathbf{A}$ は Runge－Lenz ベクトルとして物理学者の間に知られるようになった．しかし，これをはじめて考えたのはLaplace である*．

---

*）Laplaceは，1799年に出版された"*Traite de Mecanique Celeste,*"（天体力学概論）の第1部において，$\mathbf{A}$ の成分を陽に表わした．天体力学の多くの論文では普通に使われるLaplace ベクトルという名称は，恐らくは正しい名前の起こりであろう．W.R.Hamiltonは，明らかにLaplace とは独立に，1845年に，ベクトル $\mathbf{A}$ が保存量であることを発見した．実質的にここで与えられたようなベクトル記法によって，このベクトルを最初に導いたのは1900 年頃の J.W. Gibbs である．C.Runge は，ベクトル解析についてのよく読まれたドイツ語の教科書（1919年）において，その導き方を踏襲し，それが摂動のある場合の水素原子の量子力学的な取り扱いに関する1924年の論文の中で，W.Lenz によって，参考文献として引用された．そのとき以来，Laplace-Runge-Lenzベクトルに関する文献と，このベクトルの使用は広範になった．さらに歴史的な詳細については，H.Goldstein，*American Journal of Physics*，43，735(1975) と 44，1123(1976) を見よ．

L は **p** × **L** に垂直であり，**r** は **L** ＝ **r** × **p** に垂直なので，**A** の定義から，容易に，

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{L} = 0, \qquad (3-83)$$

であることがわかる．**A** の **L** に対する直交性から，**A** は軌道の平面に固定されたあるベクトルでなければならないことが導かれる．もし θ が，**r** と，固定された **A** の方向との間の角を表わすのに用いられるならば，**r** と **A** とのスカラー積は，

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = Ar\cos\theta = \mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) - mkr. \qquad (3-84)$$

によって与えられる．さて，３重積の項の順序を並べ換えることによって，

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = \mathbf{L}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = l^2.$$

p.104
となる．したがって，(3－84) 式は，

$$Ar\cos\theta = l^2 - mkr,$$

すなわち，

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left(1 + \frac{A}{mk}\cos\theta\right), \qquad (3-85)$$

となる．したがって，Laplace－Runge－Lenz ベクトルは Kepler 問題に対する軌道の方程式を導くもう一つ別の方法を与えることになる！(3－85) 式と (3－51) 式の形に表わされた軌道の方程式を比較すれば，**A** が軌道上で近日点の方向に向く動径ベクトルの方向にあることがわかる．そしてその大きさは，

$$\mathrm{A} = mke. \qquad (3-86)$$

である．

したがって，Kepler の問題に対しては，２つのベクトルの運動の定数，**L** と **A**，および１つのスカラーの運動の定数 E を持つことになった．ベクトルは３つの独立な成分を持たなければならないので，これは合計で７個の保存量に対応している．さて，３つの自由度をもつこのような１つの系は，例えば，質点の最初の位置と最初の速度の各々の３つの成分に対応して，６つの独立な運

動の定数を持つ．さらにわれわれが見つけた運動の定数は，すべて $\mathbf{r}$ と $\mathbf{p}$ との代数関数であって，全体としての軌道（空間中における方向とか離心率等）を記述する．すなわち，７つの保存量の中で，質点の軌道上の最初の位置と関連するものは１つもない．運動の定数の１つは，例えば近日点の通過時刻 T の形で，その情報と関係づけられなければならないので，軌道の大きさ，形，方向を記述するものとしては５つの独立な運動の定数のみが残ることになる．したがって，$\mathbf{L}$ と $\mathbf{A}$ と E を構成する７つの量のすべてが独立であることはできないことが結論される．実際，これらの量を関係づける２つの関係がなければならない．１つのそのような関係は，すでに $\mathbf{A}$ と $\mathbf{L}$ との直交性を示す（３－83）式として得られている．もう１つの関係式は，（３－57）式から，離心率が E と l によって表わされるときに，（３－86）式から導かれるものであって，

$$A^2 = m^2k^2 + 2mEl^2 \ , \qquad (3-87)$$

となる．したがって，７つの保存量のうち５つだけの独立な運動の定数があることが確認される*.

角運動量ベクトルとエネルギーだけでは，運動の４つの独立な定数のみを含んでいる．したがって，Laplace－Runge－Lenzベクトルは，もう１つの運動の定数を付け加える．一般的な中心力に対して，Kepler の問題という特殊な場合に対するLaplace－Runge－Lenz のベクトルと似たようなやり方で，$\mathbf{L}$ と E とを合わせて，軌道を定義するのに役立つような，ある保存量が，なぜ存在しないのか，と問うのは当然のことである．その答えは，そのような保存量を実際に作ることはできるが,† しかしそれらは一般に運動の幾分特殊な関数である，ということである．その軌道に関する運動の定数は，全体としてその軌道を定義する．すなわち，r を θ の関数として与える軌道の方程式を導く．中心力による運動に対する軌道が，一般的には閉軌道ではないということをみてきた．３－６節の議論は，軌道が閉じていることから，逆に力の法則に関する幾分強い

p.105

---

*) 上の段落に与えられた議論は，明らかに1799年にLaplaceによって最初に与えられたものである．彼はまた，$\mathbf{A}$ の大きさと離心率との間の関係（３－86）式を陽に示した．

†) 例えば，D.M.Fradkin, *Progress of Theoretical Physics* 37, 798, May 1967を見よ．

条件が得られるということを示した．r の回帰点の限界の間にある，任意の (r, θ) 点を，究極的には曲線が通るであろうということは，閉じない軌道の1つの性質である．直観的に，これは軌道が閉じないという性質からわかることである．θ が完全な1サイクルを動くときに，質点は決して以前の軌道上の跡をたどらない．したがって，軌道の方程式は，r が θ の多価関数（mod 2π）であり，実際 θ の**無限多価関数**であるようなものである．このことに対応して軌道を定義するために $\mathbf{L}$ と E に付け加えられる保存量は，同様に質点の運動の無限多価関数を含まなければならない．軌道が閉じているところでのみ，または，もっと一般的には運動が**縮退**しているところでのみ，Keplerの問題におけるように，Laplace－Runge－Lenz ベクトルのような，$\mathbf{r}$ と $\mathbf{p}$ の簡単な代数関数である付加的な保存量を期待することができる．これらの議論から，われわれが見たように，軌道がやはり縮退しているHooke の法則に従う力に対して，そのような1つの保存ベクトルに類似のものが存在することを予想できるであろう．これは，実際に，運動の定数を自然な方法で定式化すれば，1つのベクトルにではなく，2階のテンソルとなることを除いては正しい（第9－7節を見よ）．E と $\mathbf{L}$ 以外の，簡単な代数関数である運動の積分，すなわち付加的な定数が存在することは，運動が縮退しており，かつ有界な軌道が閉じていることを示すために十分である．

3－10　中心力の場における散乱

歴史的には，中心力に対する関心は，惑星の運動という天文学上の問題から生まれてきた．しかし，中心力による運動を，そのような問題によってのみ考えなければならないという理由はない．Bohr 原子における電子の軌道についてはすでに述べたが，古典力学によって研究できるもう1つの分野は，中心力の場による粒子の**散乱**（*scattering*）である．もちろん，粒子が原子的な尺度のものであれば，古典的な取り扱いによる特定の結果が，物理的には正しくないことがしばしば起こることは予期しなければならない．なぜなら，そのような領域では，一般に量子効果が大きいからである．しかし，それにもかかわらず古典的な予言が，かなりよい近似で成り立つ場合が多い．もっと重要なことは，

用いる力学が古典力学であろうと量子力学であろうと，散乱の現象を記述する手続きは同じであるということである．すなわち，古典力学に基礎をおいても，同じようにこの現象をいい表わす言葉を学ぶことができるのである．

１体問題的な形式では，散乱の問題は力の中心による粒子の散乱を取り扱うことになる．さて，電子，α 粒子，惑星のいずれであるかを問わず，すべての粒子が，同じ質量とエネルギーを持つ一様な粒子の流れが，力の中心に向って入射する場合を考えよう．きわめて遠方では，力が零になってしまうものと仮定しよう．入射粒子の流れは，その**強さ**（*intensity*）I（粒子束密度（flux density）ともいう）を指定することによって特徴づけられる．これは流れに p.106 垂直な単位面積を単位時間に通過する粒子の数を与えるものである．粒子が力の中心に近づくと，これに引きつけられ，あるいは反発されて，その軌道は初めの直線軌道からそれる．力の中心を通りこすと，粒子に作用する力は遂には減少してしまって，軌道は再び直線に近づく．一般に，最後の運動方向は，入射方向と同じではない．このとき，粒子は散乱されたという．この場合，**ある与えられた方向への散乱断面積**（*cross section for scattering in a given direction*）$\sigma(\mathbf{\Omega})$ は，

$$\sigma(\mathbf{\Omega})\,d\Omega=\frac{\text{単位時間ごとに立体角 } d\Omega \text{ の中に散乱される粒子の数}}{\text{入射する粒子の流れの強さ}} \tag{3－88}$$

で定義される．ここで，$d\Omega$ は $\mathbf{\Omega}$ 方向における立体角の要素である．$\sigma(\mathbf{\Omega})$ はまた，しばしば散乱の**微分断面積**（*differential scattering cross section*）とも呼ばれる．中心力の場合には，入射粒子の流れの軸のまわりに完全な対称性が存在しなければならないから，立体角の要素は，

$$d\Omega = 2\pi\sin\Theta\, d\Theta, \tag{3－89}$$

と書くことができる．ここで Θ は散乱方向と入射方向の間の角であって，**散乱角**（*scattering angle*）として知られている（図３－14 参照，ここでは斥力による散乱の場合が示されている）．“断面積”という呼び方は，$\sigma(\mathbf{\Omega})$ が面積のディメンションをもっていることからでている．

どんな粒子の場合でも，軌道の定数，したがって散乱の大きさは，粒子のエ

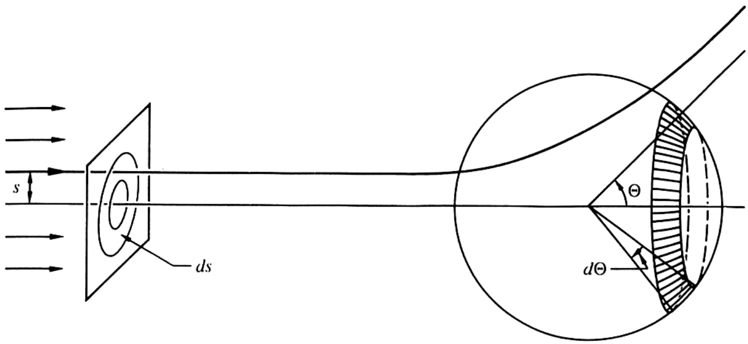


図 3－14
力の中心による入射粒子の流れの散乱.

ネルギーと角運動量によって決定される．角運動量は，エネルギーと**衝突径数**（*impact parameter*）s と呼ばれる量を用いて表わすのが便利である．この衝突径数は，力の中心と入射速度の間の垂直距離として定義される．v_0 を入射する粒子の速さとすると，角運動量は，

$$l = mv_0 s = s\sqrt{2mE}\,, \qquad (3-90)$$

p.107
で与えられる．E と s とを定めると，散乱角 Θ は一義的に決められる*．さし当り，s の値が異なれば，同じ散乱角が得られることはないと仮定しよう．したがって，Θ と $\Theta + d\Theta$ の間にある立体角 $d\Omega$ の中に散乱される粒子の数は，衝突径数がこれに対応する s と $s + ds$ の間にある入射粒子の数に等しくなければならない．すなわち，

$$2\pi Is\,|ds| = 2\pi\sigma(\Theta)I\sin\Theta\;|d\Theta| \qquad (3-91)$$

である．s と Θ とは反対方向に変化するが，粒子の数は常に正でなければならないから，（3－91）式で，絶対値記号がつけられた．s をエネルギーと，そ

*）古典力学と量子力学とが分かれるのはこの点である．実際どのような特別な粒子に対しても，その軌道をあいまいさなしに予言することはできない，ということが量子力学の基本的な特徴である．量子力学では，ただ，いろいろな方向に散乱される確率を与えることができるだけである．

れに対応する散乱角の関数と考えて，

$$s = s(\Theta, E), \tag{3-92}$$

とすると，微分断面積のΘに対する関係は，

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin\Theta}\left|\frac{ds}{d\Theta}\right|, \tag{3-93}$$

で与えられる．

s の関数としての散乱角Θに対する形式的な式は，軌道の方程式（3－36）式から直接に得られる．再び，簡単のため，純粋に斥力の場合を考えよう（図3－15参照）． 軌道は，最近点（periapsis）の方向のまわりに対称でなければならないので，散乱角は

$$\Theta = \pi - 2\Psi, \tag{3-94}$$

p.108
で与えられる．ここで，Ψは入射漸近線の方向と，最近点の方向との間の角である．次に，（3－36）式で $\theta_0 = \pi$（入射方向）のとき $r_0 = \infty$ とおくと，r が力の中心への最近接距離 r_m に等しいとき，$\theta = \pi - \Psi$ であるから，Ψが得られる．式を少し整理すれば，

$$\Psi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{\dfrac{2mE}{l^2} - \dfrac{2mV}{l^2} - \dfrac{1}{r^2}}}, \tag{3-95}$$

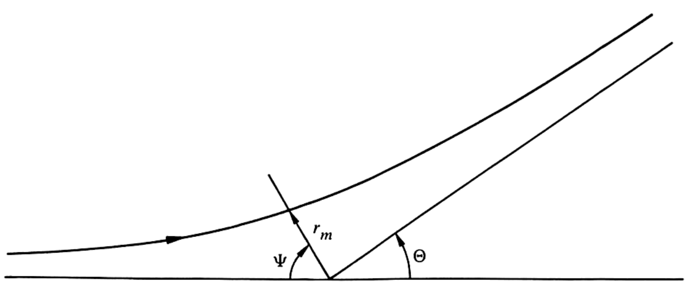


図3−15
斥力による散乱の例での軌道パラメーターと散乱角との関係．

となる．衝突径数 s（式（3－90））によって l を表わせば，$\Theta(s)$ に対する式は結局，

$$\Theta = \pi - 2\int_0^{u_m} \frac{s\,du}{\sqrt{1 - \dfrac{V(u)}{E} - s^2u^2}}, \tag{3-96}$$

あるいは，

$$\Theta = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty} \frac{s\,dr}{r\sqrt{r^2\left[1 - \dfrac{V(r)}{E}\right] - s^2}}, \tag{3-97}$$

となる．

（3－96）式と（3－97）式は，散乱角の直接的な数値計算をするときを除いては，殆ど使われることはない．しかしながら，軌道に対する解析的な式が使えるときには，Θ と s との間の関係は，ほとんど視察によって得ることができることが多い．そのような手続きの，歴史的に重要な例は，斥力の Coulomb 場による荷電粒子の散乱である．散乱を生じさせる力の場は，固定した電荷 $-Ze$ によって作られ，この力が電荷 $-Z'e$ をもつ入射粒子に作用するものとする．したがって力は，

$$f = \frac{ZZ'e^2}{r^2},$$

と書くことができる．すなわち，逆２乗の法則に従う斥力である．第３－７節の結果は，力の定数を，

$$k = -ZZ'e^2 \tag{3-98}$$

と書くだけで，そのままこの場合に利用することができる．エネルギー E は零より大きく，軌道は双曲線である．その離心率は，

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m(ZZ'e^2)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{ZZ'e^2}\right)^2}, \tag{3-99}$$

で与えられる*．ここで（3－90）式が使われた．（3－51）式で $\theta' = \pi$ ととる

*）電子の電荷 e との混同をさけるために，離心率は一時的に ϵ で表わされる．

と，最近点（periapsis）は $\theta = 0$ に対応し，軌道の方程式は，

$$\frac{1}{r} = \frac{mZZ'e^2}{l^2}(\epsilon\cos\theta - 1)\,, \qquad (3-100)$$

p.109
となる．入射漸近線の方向 Ψ は，$r \to \infty$ という条件で決められて，

$$\cos\Psi = \frac{1}{\epsilon}\,,$$

となる．または（３－94）式によって，

$$\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}\,,$$

となる．したがって，

$$\cot^2\frac{\Theta}{2} = \epsilon^2 - 1,$$

となり，（３－99）式を使うと，

$$\cot\frac{\Theta}{2} = \frac{2Es}{ZZ'e^2}\,,$$

となる．そこで，衝突径数と散乱角の間の求めていた関数関係は，

$$s = \frac{ZZ'e^2}{2E}\cot\frac{\Theta}{2}, \qquad (3-101)$$

である．したがって，（３－93）式により，必要な計算を遂行すれば，$\sigma(\Theta)$ は，

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4}\left(\frac{ZZ'e^2}{2E}\right)^2\csc^4\frac{\Theta}{2}, \qquad (3-102)$$

によって与えられる．（３－102）式は，有名な Rutherford の散乱断面積を与えるものであって，最初，原子核による α 粒子の散乱に対して Rutherford が導き出したものである．非相対論的な量子力学は，この古典力学的な結果と同じ断面積を与える．

原子物理学では，

$$\sigma_T = \int_{4\pi}\sigma(\mathbf{\Omega})\,d\Omega = 2\pi\int_0^{\pi}\sigma(\Theta)\sin\Theta\,d\Theta,$$

で定義される**散乱の全断面積**（*total scattering cross section*）σ_T の概念が

かなり重要である．しかしながら，（3－102）式をこの定義の式に代入して，Coulomb 散乱に対する全断面積を計算しようとすると，無限大という結果が得られる！　このような振舞いの背後にある物理的な理由を探し出すことは困難ではない．全断面積は，その定義によって，入射する粒子束の単位の強さについて，単位時間内にあらゆる方向に散乱される粒子の数である．ところで，Coulomb 場は“到達距離の長い”力（long range force）の例であって，その効果は無限の遠方にまで及ぶ．軌動のまがりが極めて小さいのは，衝突径数の極めて大きい粒子の場合に限られる．だから，無限に広い断面をもつ入射粒子の流れの中のすべての粒子がある程度散乱され，したがって，これらはすべて散乱の全断面積の中に含まれなければならない．それゆえ，σ_T が無限大になることは，明らかにCoulomb場に特有なことではない．古典力学において
p.110
は，散乱を生じさせる力の場がどんなに大きい距離の所でも零でないときには，いつでも σ_T は無限大になるのである*．力の場が“切断される”（cut off）場合，すなわち，ある距離を越えると力が零になる場合に限って，散乱の全断面積が有限になる．物理的には，原子核の Coulomb 場に対しては，原子内電子の存在によって原子核の場が“遮ぎられ”（screen），その結果，遠距離では原子核の電荷の影響が実質的には打ち消されるために，そのような切断が起きている．

Rutherford 散乱では，散乱角Θは，衝突径数 s の滑らかな単調関数である．（3－101）式から，s が無限大から減小するにつれて，Θは単調に0から増加し，s が零に近づくとΘは π となることがわかる．しかしながら，古典力学に従う系では，古典的な断面積に対する（3－93）式をいくらか変更すれば，他の型の振舞いも可能である．例えば，図3－16（a）に示されたような定性的な性質をもつ斥力ポテンシャルと粒子のエネルギーの場合には，s に対するΘ

*）σ_T は量子力学においても，Coulomb 場に対しては無限大になる．それは，前に述べた通り（3－102）式はこの場合にも成立するからである．しかし，量子力学では，“到達距離の長い”力がすべて無限大の全断面積を与えるわけではない．量子力学では，遠距離において $1/r^2$ よりも速く減少するポテンシャルは，すべて散乱に対して有限の断面積を与える．Landau and Lifschitz, *Course of Theoretical Physics*, Vol.3, *Quantum Mechanics* (Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1965) p.473を参照せよ．

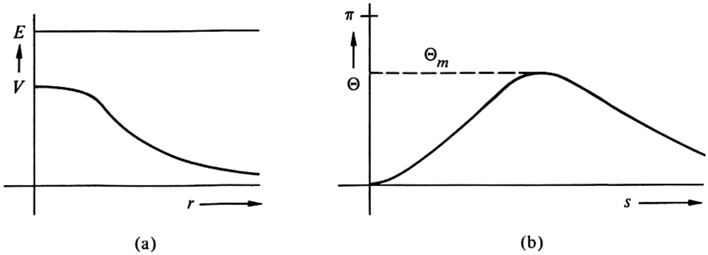


図 3－16
正則な斥力散乱ポテンシャルと十分大きなエネルギーに対する
衝突径数 s_0 に対する散乱角 Θ の 2 価曲線.

の曲線は，図 3－16 (b) に示されたように振舞うことは物理的には容易にわかる．すなわち，衝突径数の値が大きければ，上に注意したように，粒子は常に力の中心からの動径距離が大きい所にあり，その軌道の曲がり方は小さい．もう一方の極限である $s=0$ の場合は，粒子は力の中心へと一直線に運動し，エネルギーがポテンシャルの最大より大きいならば，全く散乱されないで，力の中心を通り抜ける．だから，s の両方の極限で散乱角は零となる．ある中間の s の値で，散乱角は最大値 Θ_m をとらねばならない．$\Theta<\Theta_m$ のときには，同じ散乱角をとる s の値が 2 つある．各々の s はその散乱角の散乱断面積に寄与するので，(3－93) 式は

$$\sigma(\Theta)=\sum_i \frac{s_i}{\sin\Theta}\left|\frac{ds}{d\Theta}\right|_i \qquad (3-103)$$

p.111
の形に修正される．ここで，添字 i は Θ の同じ値を生じる s のいろいろな値を区別するためのものである．

特に関心があるのは，最大の散乱角 Θ_m に対する断面積である．Θ の s についての導関数は，この角度で零になるから，(3－93) または (3－103)式から，$\Theta\to\Theta_m$ のとき，断面積は無限大にならなければならない．しかし，散乱角は Θ_m を越えることができないので，Θ_m より大きい角度に対しては断面積は零である．断面積が無限に増大し，引きつづいて急激に零となるという現象は，雨滴による日光の散乱の幾何光学において現われる事情と大変よく似てい

る．この類似性に基づいて，この現象は**虹散乱**（*rainbow scattering*）と呼ばれている．

今までにでてきた例は，純粋な斥力による散乱についてのものであった．散乱が引力を含むならば，もう少し複雑なことが起こる．引力の効果は，斥力の場合に図 3－15 に示されたように，粒子を外側へと曲げるかわりに，力の中心の方に引き込むことである．したがって，入射方向と最近点方向との間の角 Ψ は $\pi/2$ より大きいこともあり得る．そしてそのとき（3－94）式で与えられた散乱角は負となる．明らかに，断面積を求める式に含まれているのは Θ の大きさであるので，このことはたいして困ったことではない．しかし，ある状況では Θ は（3－96）式によって計算すると 2π よりも大きいこともあるであろう．すなわち，散乱を受ける粒子は，力の中心のまわりを 1 回転またはそれ以上回転し，最終的には散乱方向へ去って行くこともあるであろう．

このことがどのようにして起こるかをみるために，図 3－17 の $s=0$ として

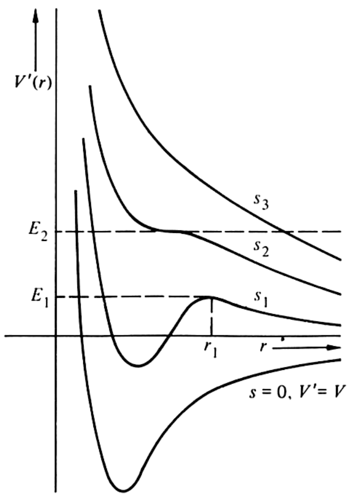


図 3－17
引力と斥力の散乱ポテンシャルの組み合わされたポテンシャルと，それに対応する衝突径数 s のいくつかの値に対する等価 1 次元ポテンシャル．

図示された散乱ポテンシャルを考えよう．このポテンシャルは，多くの運動学 p.112 的問題において仮定される分子間ポテンシャル ── 遠距離においては $1/r^2$ より早く減少する引力ポテンシャルであって，近距離においては急激に増加する斥力ポテンシャル ── の典型的なものである．図3－17の他の曲線は，有効1次元ポテンシャル $V'(r)$ ，（3－22′）式を，衝突径数 s のいろいろな値（すなわちいろいろな l の値）に対して示している．$s>0$ のすべての値に対して，大きな r では遠心力の斥力の障壁が $V'(r)$ の大きさを支配するので，小さな s に対する等価ポテンシャルは，こぶを示す．こぶの最大に対応するエネルギー E_1 で，衝突径数 s_1 をもつ入射粒子を考えよう．第3－3節で注意したように E_1 と $V'(r)$ の間の差は，その距離での動径速度の2乗に比例する．入射粒子が，V' の最大の位置 r_1 に達するとき，動径速度は零である．実際，距離 r_1 で，不安定な円軌道に対する条件が得られることを，第3－6節の議論から思い起こすであろう．摂動のない場合には，パラメーター，E_1 と s_1 を持つ粒子は，1度 r_1 に達すると，その距離で，そこから脱け出さないで，際限なく力の中心のまわりをまわるであろう！　同じ衝突パラメーターで，E_1より少し大きなエネルギー E に対しては，本当の円軌道とはならない．しかし粒子がr_1のごく近くにいるときには，動径速度は大変小さく，粒子はこぶの近傍に極めて長時間いることになるであろう．一方角速度 $\dot{\theta}$ は r_1 において

$$\dot{\theta}=\frac{l}{mr_1^2}=\frac{s_1}{r_1^2}\sqrt{\frac{2E}{m}}\ ,$$

と与えられるので，V' が最大になることによって影響はされない．したがって，粒子はポテンシャルのこぶの領域を通過するのに要する時間中に，粒子が 2π より大きなまたはその数倍の角度だけ回るような角速度を持つこともある．そのような場合には，古典的な散乱は軌道の周回（*orbiting*）あるいは**らせん状**（*spiraling*）を示すといわれる．

衝突径数が大きくなるにつれて，等価ポテンシャル V' のくぼみとこぶは，だんだん平らになり，ついにはある値 s_2 に対してはエネルギー E_2 で V' にたった1つの変曲点が存在するようになる（図3－17参照）．粒子のエネルギーが E_2 より大きいとき，粒子はもはや軌道を周回しない．しかし有効ポテンシャル

の引力成分と斥力成分の効果が組み合わされると，そのような場合においても，ある有限な値の衝突径数に対して，散乱角が零になることさえもある．エネルギーが大きくて，小さい衝突径数のときは，主な散乱の効果は，近距離での強い斥力ポテンシャルによって引き起こされ，散乱は定性的にRutherford散乱に似ている．

軌道の周回が起こるときには，散乱された粒子は，角度がラジアンの単位で π，すなわち 180° よりも大きく曲げられることがあることを見た． 他方，実験室で観測される散乱角は 0 と π の間にある．したがって，そのようなあいまいな場合には，（3－96）式または（3－97）式の右辺によって計算される**ふれの角**（*deflection angle*）Φ と，観測される散乱角 Θ とを区別するのが有用である．与えられた Φ に対して，角度 Θ は，関係式

$$\Theta = \pm\Phi - 2m\pi, \qquad m \text{ は整数}$$

p.113
によって決められる．m の符号と値は Θ が 0 と π の間にあるように取られる．（3－103）式の和は，同じ Θ となる Φ のすべての値をカバーしている．図3－18は，2つの異なったエネルギーでの図3－17のポテンシャルについて，s に対する Φ の略図的な曲線を示している． $E = E_1$ で，軌道の周回が起こることは，$s = s_1$ での曲線の特異性として現われる． $E > E_2$ のときは，軌道の

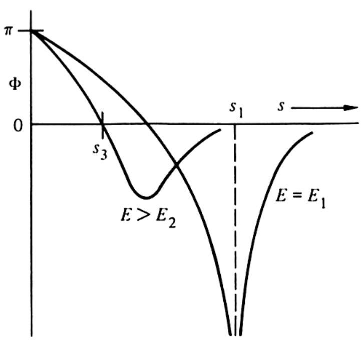


図 3－18
2つの異なったエネルギーにおける図3－17のポテンシャルについて，s に対するふれの角 Φ の曲線の略図．

周回はもはや起こらないが，$\Theta = -\Phi$ で虹効果（rainbow effect）がある（より大きな散乱角において，零とならない断面積があるけれども）． $s = s_3$ で Θ が零となることに注意しよう．このことは（3−93）式から， $\sin\Theta$ が零になることによって，前方において断面積が無限大となることを意味する．もし，

$$s\left|\frac{ds}{d\Theta}\right|$$

が $\Theta = \pi$ で有限となるならば，断面積は後方で同様に無限大となることができる．前方または後方の散乱角において断面積が無限大となることは，気象光学における対応した現象との類推により，**光輪散乱**（*glory scattering*）と呼ばれる*.

近年，古典力学における散乱と，古典的な散乱断面積の計算に対する関心が復活した．結晶格子の低エネルギー・イオンの散乱におけるように，いくつかの例においては量子効果が小さく，古典的な計算が直接的に有用である．量子力学的補正が重要であるときでさえも，古典的な軌道の知識が必要とされるような近似法（"半古典的"近似）で十分なことがしばしばある．実際的に関心のあるほ
p.114
とんどすべてのポテンシャルに対して，軌道に対する解析的な形を見出すことは不可能であり，（3−96）式（またはその変形された式）は，s の特別な領域で近似されるか，または数値的に積分される．

3−11 散乱問題の実験室座標系への変換

前節で述べたのは，固定した力の中心による粒子の散乱という1体問題に関することであった．しかし実際には，散乱は常に2つの粒子に関係する．例えば Rutherford 散乱には，α 粒子と原子核が関与する．第2の粒子は固定されてはいなくて，散乱の結果，反跳（recoil）を受けて最初の位置からずれる．ところで，中心力の2体問題は，いずれも1体問題に引き直すことができる，

*）後方光輪は，飛行機で旅行する人々にはよく知られており，下の雲の上に射影された飛行機をとりまく光の輪として観測される．ところで，幾何光学の用語による古典散乱の現象の説明は，偶然の一致ではない．第10−8節で示されるように，古典力学は事実量子力学の幾何光学（射線描像）的極限であり，古典力学の各々の散乱状況に対して，対応する幾何光学の問題が見出される．

ということは前に示したから，この場合の変化は単にmを換算質量μで置き換えることだけであると考えられるかもしれない．しかし問題は決してそのように簡単ではない．散乱角は，実際は実験室で測定される．この角は，散乱された粒子の最終の方向と，入射方向とのなす角である．これをϑで表わすことにしよう*．他方，等価な１体問題から計算される角Θは，２つの粒子の間の相対位置ベクトルの最後と最初の方向のなす角である．この２つの角は，第２の粒子が散乱過程を通じて動かない場合にのみ等しい．しかし，一般に第２の粒子は，最初静止していても，２つの粒子が互いに及ぼし合う力のために，それ自身運動し始める．そうすると，図３－19に示すように，この２つの角は異なる値を持つことになる．このように，等価な１体問題は，実験室に固定した座標系で測定した散乱角を直接には与えない．

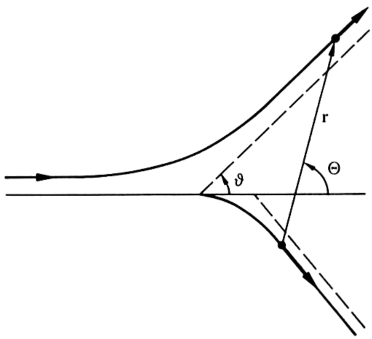


図３－19
実験室系から見た２つの粒子の散乱.

散乱角Θとϑの間の関係は，２つの粒子の質量中心とともに運動する座標系で，散乱がどのように起こるかを調べることによって，決めることができる．そのような系では，全線運動量はもちろん零であって，２つの粒子はいつでも
p.115 等しい大きさで反対方向の運動量をもって運動する．図３－20は，質量中心

*）散乱角ϑを２つの粒子の間の相対位置ベクトル$\mathbf{r}$の角座標θと混同してはならない．

系の観測者に対して，散乱の過程がどのように見えるかを図示したものである．散乱の前には，2つの粒子は1直線上を互いに相手の方に向って進み，散乱の後には，互いに直線的に遠ざかる．したがって，最初と最後の相対位置ベクトルの方向のなす角Θは，質量中心系におけるどちらか一方の粒子の散乱角と同じでなければならない．こういうわけで，2つの散乱角Θとϑの間の関係は，質量中心系と実験室系の変換を考えることによって得られる．第3－1節の用語を少し修正して，ここで使うのが便利である．

$\mathbf{r}_1$ および $\mathbf{v}_1$　は実験室系における入射粒子1の散乱後の位置および速度．

$\mathbf{r}'_1$ および $\mathbf{v}'_1$　は質量中心系における入射粒子1の散乱後の位置および速度．

$\mathbf{R}$ および $\mathbf{V}$　は実験室系における質量中心の位置および（一定の）速度．

とするのである．どの瞬間にも，定義によって，

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_1 ,$$

であり，したがって，

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_1 , \qquad (3-104)$$

である．図3－21は，散乱が起こってしまった後に求めたベクトルを図式的に描いたものであって，この時刻には $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}'_1$ は最初の方向に沿うベクトル$\mathbf{V}$とそれぞれϑおよびΘの角をなす．標的が実験室系で初め静止しているから，

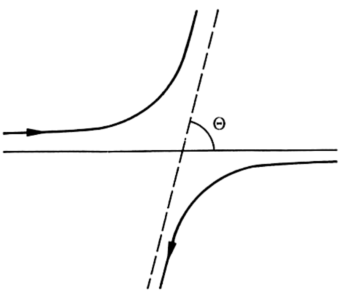


図3－20
質量中心系から見た，2つの粒子の散乱．

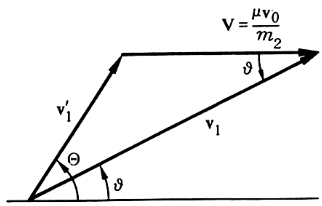


図3－21
質量中心系および実験室系における速度の間の関係．

その系での粒子の入射速度 $\mathbf{v}_0$ は粒子の最初の相対速度と同じである． 全線運動量の保存によって，質量中心の一定の速度は，それゆえ，

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V} = m_1\mathbf{v}_0,$$

p.116
で与えられる．または，

$$\mathbf{V} = \frac{\mu}{m_2}\mathbf{v}_0, \quad (3-105)$$

である．図（3－21）から，

$$v_1 \sin\vartheta = v_1' \sin\Theta,$$

および，

$$v_1 \cos\vartheta = v_1' \cos\Theta + V, \quad (3-106)$$

であることはすぐわかる．これら2つの式の比は，ϑ と Θ との間の関係

$$\tan\vartheta = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + \rho}, \quad (3-107)$$

を与える．ここで，ρ は

$$\rho \equiv \frac{\mu}{m_2}\frac{v_0}{v_1'}, \quad (3-108)$$

と定義されている．図3－21の3角形に余弦法則を適用し， 他の速さによって v_1 を表わすことによって，もう1つの関係式，

$$v_1^2 = v_1'^2 + V^2 + 2v_1' V \cos\Theta, \quad (3-109)$$

が得られる．（3－106） 式から， v_1 を消去するためにこの式を使い，V を（3－105）式によって v_0 を用いて表わすと，

$$\cos\vartheta = \frac{\cos\Theta + \rho}{\sqrt{1 + 2\rho\cos\Theta + \rho^2}}, \quad (3-110)$$

が得られる．

これら両方の関係は，なお ρ を通じて速さの比を含んでいる．質量中心の定義によって，粒子1の質量中心系での速さ v_1' は，相対速度 v と，方程式

$$v_1' = \frac{\mu}{m_1} v$$

((3－2)式参照)によって，関係づけられる．ゆえに ρ は，

$$\rho = \frac{m_1}{m_2} \frac{v_0}{v} \qquad (3-108')$$

p.117
と書くことができる．ここで v は衝突後の相対的な速度であることを強調しておく．衝突が弾性的であるときには，2つの粒子の全運動エネルギーは変わらなくて，また v は v_0 に等しくなければならない．したがって ρ は，

$$\rho = \frac{m_1}{m_2}, \quad (\text{弾性衝突}) \qquad (3-111)$$

であり，エネルギーまたは速さに無関係である．衝突が非弾性的であるならば，2つの粒子の全運動エネルギーは変化する(例えば，運動エネルギーのある部分は標的粒子の内部励起エネルギーとなる)．質量中心の運動エネルギーが一定であるから，衝突によって生ずるエネルギーの変化は，運動量の保存則によって，

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu v_0^2}{2} + Q, \qquad (3-112)$$

と表わされる．非弾性衝突のいわゆる Q 値は，明らかに，負の量であるが，符号の規約は一般的に原子反応および核反応に対して使われる符号の規約に一致するように選ばれる．(3－112)式から，衝突の前と後との相対速度の比は，

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{1 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{Q}{E}}, \qquad (3-113)$$

と書かれる．ここで E は(実験室系における)入射粒子のエネルギーである．したがって，非弾性散乱に対して，ρ は，

$$\rho = \frac{m_1}{m_2 \sqrt{1 + \dfrac{m_1 + m_2}{m_2} \dfrac{Q}{E}}}, \quad (\text{非弾性散乱}) \qquad (3-114)$$

となる．

散乱角 ϑ と Θ は，一般に大きさが異なるだけでなく，微分断面積 σ の値は

変数として，２つの角のどちらが使われるかにも依存する．２つの関数形の間の関係は，ある特定の実験において，立体角のある与えられた要素へ散乱される粒子の数が，その事象を ϑ によって測定しようと，あるいはΘによって測定しようと同じでなければならないという事実から得られる．このことは，式の上では，

$$2\pi I\sigma(\Theta)\sin\Theta\,|d\Theta| = 2\pi I\sigma'(\vartheta)\sin\vartheta|d\vartheta|,$$

または，

$$\sigma'(\vartheta) = \sigma(\Theta)\frac{\sin\Theta}{\sin\vartheta}\left|\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right| = \sigma(\Theta)\left|\frac{d(\cos\Theta)}{d(\cos\vartheta)}\right|, \qquad (3-115)$$

と書くことができる．ここで，$\sigma'(\vartheta)$ は実験室系での散乱角によって表わされた微分散乱断面積である．導関数は（３－110）式から容易に求められて，結果は

$$\sigma'(\vartheta) = \sigma(\Theta)\frac{(1+2\rho\cos\Theta+\rho^2)^{3/2}}{1+\rho\cos\Theta}, \qquad (3-116)$$

p.118
となる．$\sigma(\Theta$ は質量中心系で観測者の測定する断面積でないことを強調しておく．$\sigma(\Theta)$ と $\sigma'(\vartheta)$ の両方共，実験室系で測定された断面積である．これらは単に異なった座標で表わされているだけである．質量中心系に固定された観測者は，実験室系で測定されるのとは違った入射粒子の束密度（flux density）を測定するであろう．そして，この粒子束密度の変換は，２つの異なった座標系で測定された断面積を（ある理由で）関係づけたいなら，考慮に入れられなければならない．

２つの粒子の質量が等しいときには，この２つの散乱角の関係は，弾性散乱に対して特に簡単な形となる．そのとき $\rho = 1$ であり，（３－110）式から，

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{1+\cos\Theta}{2}} = \cos\frac{\Theta}{2}$$

すなわち，

$$\vartheta = \frac{\Theta}{2}, \qquad (\rho = 1)$$

が得られる．したがって，２つの粒子が等しい質量のとき，実験室系では散乱角が90°より大きいことはあり得ない．すべての散乱は，散乱方向に対する前

方の半球中に現われる．したがって，散乱断面積は，（3－116）式から，Θによって，

$$\sigma'(\vartheta) = 4\cos\vartheta\cdot\sigma(\Theta), \qquad \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad (\rho = 1)$$

のように与えられる．散乱がΘについて等方的，すなわち $\sigma(\Theta)$ が Θ に無関係に一定であるときでも，ϑ についての断面積の角度の余弦のように変化する！

全運動エネルギーが一定である弾性衝突においてさえも，最初に静止している標的粒子との衝突では，入射粒子の運動エネルギーが減少し，その分だけ標的粒子への運動エネルギーの移動が生ずる．言い換えると，衝突によって入射粒子が減速（*slow down*）される．v_1' と V がそれぞれ（3－108）式と（3－105）式によって v_0 で表わされるならば，減速の割合は（3－109）式を用いて次式で与えられる．

$$\frac{v_1^2}{v_0^2} = \left(\frac{\mu}{m_2\rho}\right)^2 [1 + 2\rho\cos\Theta + \rho^2]. \qquad (3-117)$$

弾性衝突に対しては $\rho = m_1/m_2$ で，（3－117）式は

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1 + 2\rho\cos\Theta + \rho^2}{(1+\rho)^2}, \quad (\text{弾性衝突}) \qquad (3-117')$$

と簡単化できる．ここで，E_0 は実験室系における入射粒子の最初の運動エネルギーで，E_1 は散乱後の対応するエネルギーである．粒子の質量が等しいときには，この関係式は，

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1+\cos\Theta}{2} = \cos^2\vartheta$$

p.119
となる．このようにして，最大の散乱角（$\Theta = \pi, \vartheta = \pi/2$）で，入射粒子はそのエネルギー全部を失い，実験室系で完全に止められてしまう．

散乱による，このような運動エネルギーの移動が，いうまでもなく熱中性子炉における“減速材”（moderator）の基礎になっている原理である．核分裂（fission）によって生ずる速い中性子は，弾性散乱を繰り返して，ついには，それが捕獲されるよりも核分裂を起こす機会の方が多いような熱運動のエネルギーにまで減速される．明らかに，最もよい減速材は，軽い元素，理想的には

水素 ($\rho=1$) であろう．原子炉 (nuclear reactor) に対しては，水素は水のような混合物または化合物の一部として含まれるときにのみ実用的である．減速性をもつ有用な他の軽い元素として，質量数 2 の重水素や質量数 12 の炭素がある．水素は，パラフィン，水またはプラスチックの中に存在するので，しばしば実験室で中性子を減速するのに用いられる．

実験室系から質量中心系への変換，および運動エネルギーの移動についてのこのような計算は，極めて新しい応用があるにもかかわらず，その本質においては特別に"近代的"あるいは"量子的"であるわけではない．また，これに関係する古典力学が，特に高等であるとか，あるいは難かしいというわけでもない．利用した事柄は，本質的には運動量とエネルギーの保存だけである．実際，同じような計算は，大学初年級の教科書にもあって，普通，例えば玉突きの玉同志の弾性衝突を使ってなされているのが見られるであろう．しかし，それが極めて基礎的な性質を持っているために，この計算の適用範囲が広いのである．運動量が保存され (これは量子力学においても正しい)，かつ Q 値が知られている限り，散乱過程の細かい点は問題にならない．実際に，散乱粒子の近傍は"暗箱" (black box) と同じことであって，我々はただ，何がその中へはいり，何が出てくるかということだけに関心を持つ．箱の中で起こっている現象が，"古典的"であるか，あるいは"量子的"であるかは，少しも問題にならないのである．したがって，この節の式は，例えば中性子ー陽子の散乱などのように，本来量子的な性質の現象を実験的に分析する場合にも，エネルギーが十分低くて，相対論的効果が無視できる限り使うことができる (衝突の運動学の相対論的な取り扱いについての議論は，第 7－7 節を見よ)．

参　考　書

E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*.　力学に関するどの教科書でも，たいてい中心力運動にはかなりのページ数をさいているので，ここには，沢山ある参考書のうちのわずかのものしか挙げることはできない．Whittaker の書物の第 47 節から 第 49 節までは，短かいけれども，この問題の多くの立ち入った点を考察しようとすることに対する簡潔な議論を与えている．力の法則が楕円関数で解かれる場合の解析に

対する，実際的に唯一の文献である．

W. D. MACMILLAN, *Statics and the Dynamics of a Particle.* この参考書の第XII章には，中心力運動について最も詳細な議論がなされており，普通取り扱われている逆2乗の法則とは別の法則に従う力に対する軌道の詳しい考察が含まれている．その取り扱い方は初等的であって，ラグランジアン形式は使っていない．Kepler の方程式が，いろいろな型の軌道に対して，多様な形で導かれ，いくつかの解法が示されている．Laplace−Runge−Lenz の運動の定数は，第301節で“積分定数”の1つとしてさらりと簡単に言及されている．

p.120

L. D. LANDAU AND E. M. LIFSHITZ, *Mechanics.* 予期されるように，この参考書は中心力による運動と散乱の問題の適用範囲内で，多くの独創的かつ珍らしい洞察を与えている．Laplace−Runge−Lenz のベクトルが一定であることが陽に示され，軌道の方方程式を導くのに使われている．衝突の運動学は，ある程度詳しく記述されている．

J. B. MARION, *Classical Dynamics of Particles and Systems.* この立派な中級程度の教科書には，中心力運動について非常に詳しい章があり，その章には，Kepler の方程式，円軌道の安定性，および有名な3体問題についてのいくつかの初等的な結果についての議論が与えられている．実験核物理学の分野に著者が深くかかわってきたのにふさわしく，衝突の運動学と断面積の計算についての章は，その取り扱われる範囲が特に完全である．

J. O. HIRSCHFELDER; D. F. CURTISS; AND B. B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids.* 気体と液体の化学物理学についての，その名にたがわない百科辞典．この参考書は，古典的なビリアル定理の応用にとって，恐らくは最良の文献であろう．1953年以来のこの分野での実質的な進歩は，当然含まれていないけれども，原子間ポテンシャルや散乱断面積についての多くの資料も与えられている．

S. W. MCCUSKEY, *Introduction to Celestial Mechanics.* 相互に作用する $1/r$ ポテンシャルの中での2体運動は，惑星，衛星および宇宙船の運動に対する第1近似となっている．だから，天体力学に関するすべての書物が，“Kepler の問題”にかなりのページ数をさいている．天体力学についての膨大な文献の中で，ここではごくわずかしか挙げることはできない．McCuskey の書物は，いろいろな軌道の運動の時間的経過を含む，広範囲の情報を簡潔にまとめており，比較的初等的な程度でこの問題を取り扱っている．

J. M. A. DANBY, *Fundamentals of Celestial Mechanics.* 著名で高く評価されている天体力学の大家によって書かれたこの教科書は，中級程度で天体力学の古典的領域の多くにふれており，コンピューターと宇宙時代の到来によって刺激されたより多

くの最近のトピックスの影響を受けている．演習問題と参考書が多い．運動の時間的経過と Kepler の方程式は，細大もらさず論じられているが，Laplace−Runge−Lenz ベクトルにもBertrand の定理にもふれていない．

H. C. PLUMMER, *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy.* 比較的古い本だが（1918年初版，1960年に再版），この書物はBertrand の定理についての最も手にはいり易い参考書であり，この章の記述はPlummer の方法に基づいている．異なった証明法は，F.Tisserand による古典，*Traité de mécanique céleste*, Tome 1, Chapter I, Section 6 に簡単に記述されている．Plummer の本は，Kepler 方程式の近似解について，特殊ないくつかの技巧を与えている．

H. V. McINTOSH, "Symmetry and Degeneracy," in *Group Theory and its Applications*, Vol. II, E.M.Loebl, ed. この論文は，簡単な物理系の内部対称性の熱心な概観を歴史的な方法で展開している．記述は，式よりも文章が多いが，読者は群論と量子力学に関するいくらかの知識をもっていることを前提としている．しかし，1970年に，対称性と縮退との間の関係があると考えれたすべてのことについての断然最良の概観である．Kepler の問題と，調和振動子の対称性の両方が，Bertrand の定理の意味と共に記述されている．

R. G. NEWTON, *Scattering Theory of Waves and Particles.* この書物は，主に散乱の量子論を含んでいるが，第5章は古典的粒子の散乱に関連しており，大部分は，K.W.Ford and J.A.Wheeler, *Annals of Physics* (*N.Y.*) 7, 259 (1959) の基本的な論文に基づいた"軌道の周回"(orbiting)と"光輪"(glories)の簡潔な議論を与えている．

演 習 問 題

p.121

1. 質量 m の質点が，回転軸が鉛直である回転放物面の内側の面上を重力の作用を受けて摩擦なしに運動している．その場合の運動に等価な1次元問題を見出せ．質点が円運動をするための初速度の条件はどうなるか．また，この円運動のまわりの微小振動の周期を求めよ．

2. 1つの質点が，ポテンシャル

$$V = -k\frac{e^{-ar}}{r}.$$

で与えられる中心力場の中を運動している．ここで k および a は正の定数である．等価な1次元ポテンシャルの方法を用いて，運動の各々のタイプに固有な l と E との範囲を述べることにより，この運動の性質を論ぜよ．どのような場合に円軌道が可能であるか？円運動のまわりの動径方向の振動の周期を求めよ．

3.　２つの質点が，万有引力の作用の下に，周期 τ でお互いのまわりを円軌道を描いて運動している．ある与えられた瞬間に，２つの質点の運動を急に止め，次にこれを放して，お互いの上に落ちるままにしておく．２つの質点は，時間 $\tau/4\sqrt{2}$ の後に衝突することを証明せよ．

4.　質点に作用する合力が，保存力 $\mathbf{F}_i'$ と，速度に比例する摩擦力 $\mathbf{f}_i$ とから成る系を考えよう．もし運動が定常状態に達し，そしてその摩擦力のために運動が衰えてしまうようなことは許されないものとすれば，そのような系に対しては，次の形のビリアル定理，

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_i \mathbf{F}_i' \cdot \mathbf{r}_i}\ ,$$

が成立することを示せ．

5.　気体中の原子の間に，ポテンシャル，

$$U(r) = \frac{k}{r^m}$$

から導かれる，中心力の到達距離の長い相互作用（long-range interactions）があるとしよう．ここで r は任意の１対の原子間の距離で，m は正の整数である．さらに，ある任意に与えられた原子に対して，他の原子が，空間に体積密度がBoltzmann因子，

$$\rho_i(r) = \frac{N}{V}e^{-U(r)/kT}\ ,$$

であるように分布されていると仮定する．ここで N は体積 V の中の原子の総数である．原子の対の間の，これらの力から得られるClausius のビリアルへ付加される量を見出し，Boyle の法則への補正を計算せよ．和が積分で置き換えられるほど N は大きくとるものとする．閉じた形の結果が，任意の正の値の m に対して見出されるが，もし望むなら，$m = +1$ ととることによって，その数学的取り扱いは簡単になる．

6.　a)　質点が，１つの中心に向う引力の作用の下で，円軌道を描く場合に，引力の中心が円周上にあるならば，その力は距離の５乗に反比例することを示せ．

b)　上述の軌道に対して，質点の全エネルギーは零であることを示せ．

c)　運動の周期を求めよ．

d)　$\dot{x}$, $\dot{y}$, と v を円周角の関数として求め，３つの量のすべてが，質点が力の中心を通るときに無限大となることを示せ．

p.122
7.　力が次のような分数の指数，

$$n = -\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{5}{3},\ -\frac{7}{3}\ ,$$

を持った距離のべき関数である場合には，中心力の問題は楕円関数を用いて解くことができることを示せ．

8. a) $1/r$ の引力ポテンシャルの中の同じ角運動量を持っている円軌道と，放物線軌道に対して，放物線の近日点距離（perihelion distance）は，円の半径 1/2 であることを示せ．

b) a) におけるのと同じ中心力の場において，放物線軌道上の任意の点における質点の速さは，同じ点を通過する円軌道上の速さの $\sqrt{2}$ 倍であることを証明せよ．

9. 隕石が，速さ v 天頂角 ϕ で地球に衝突するのが観測されるとする．地球よりずっと遠方では，隕石の速さは v' であって天頂角 ϕ' をなす方向に進んでおり，地球の重力は隕石を地球の表面と交わる双曲線軌道へと引き込む効果をもつとしよう．既知の定数を用いて，v と ϕ から，どのようにして v' と ϕ' が決定されるかを示せ．

10. 小さな離心率 e をもつ Kepler の楕円軌道において，楕円の空の（empty）焦点から見た質点の角度方向の運動は，e の 1 次までに対して一様であることを証明せよ（空の焦点とは引力の中心でない方の焦点のことである）．惑星運動についてのプトレマイオスの（Ptolematic）描像が適度によい近似であるのは，この定理のためである．この描像に基づいて，太陽は円軌道上を一様に動くと仮定され，その円の中心は**イクアント**（equant）と呼ばれる距離だけ地球から移動している．もしイクアントが，正しい楕円軌道の 2 つの焦点の間の距離と等しくとられるならば，そのとき角度方向の運動はこのようにして，プトレマイオスの描像によって e の 1 次のオーダーまで正確に記述される．

11. SF（science fiction）の古典的なテーマの 1 つは，地球と双子である惑星（"惑星 X"）のことである．これは，質量，エネルギーおよび運動量は地球と同じだが，軌道上で地球に対して位相が180°ずれて位置しているので，太陽によって隠されていて地球からは見えない．しかし軌道が楕円であるという性質から，常に完全に隠されているわけではない．そのような惑星が地球と同一の楕円軌道上にあり，地球が近日点にあるときには，その惑星は遠日点（aphelion）にあると仮定しよう．このとき，地球から見たその双子惑星と太陽との最大の分離角を，e の 1 次のオーダーに対して計算せよ．その双子惑星は地球から見ることができるだろうか．またその双子惑星は地球と同じ大きさで，同じ形の楕円軌道上にあるが，地球の軌道から 180° 回転しており，それで地球とその双子惑星は同時に近日点にあると仮定しよう．計算を繰り返えして，2 つの状況において地球からこの双子惑星が見える可能性を比較せよ．

12. 万有引力による楕円軌道の近地点（perigee）において，1 つの質点が動径方向に力積 S（第 2 章の演習問題 9 を参照）を受け，その質点は別の楕円軌道へ移るとする．そのとき新しい半長軸，離心率および長軸の方向を元の値によって決定せよ．

13. 太陽系の宇宙塵が一様に分布していることによって，太陽の惑星への万有引力に付加的な力，

$$\mathbf{F} = -mC\mathbf{r},$$

を付け加える．ここでmは惑星の質量，Cは万有引力定数と宇宙塵の密度に比例する定数，$\mathbf{r}$は太陽から惑星への動径ベクトルである（太陽も惑星も質点と考える）．この付加的な力は，直接の太陽－惑星間の万有引力に比べて大変小さい．

a) この組み合わされた場における惑星の半径r_0の円軌道に対する周期を計算せよ．

p.123
b) この円軌道から，わずかに摂動があるときの，動径方向の振動の周期を計算せよ．

c) ほとんど円形の軌道が歳差運動をしている楕円によって近似されることを示し，歳差運動の周期を求めよ．歳差運動は，軌道角速度に対して同じ方向か，あるいは反対方向か．

14. ポテンシャルの場

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2},$$

における質点の運動が，力の中心のまわりに回転している，あるいは，歳差運動している，座標系によって表わされたとき，Kepler のポテンシャルのみの質点の運動と同じであることを示せ．

全エネルギーが負であるとき，もし付加的なポテンシャルの項がKepler のポテンシャルに比べて極めて小さいならば，そのとき楕円軌道の歳差運動の角速度は，

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi mh}{l^2\tau},$$

であることを示せ．

水星の近日点は（既知の惑星による摂動に対する補正をした後），1世紀当りに約40秒の割合で歳差運動することが観測されている．この歳差運動は，無次元の量，

$$\eta = \frac{h}{ka},$$

が 7×10^{-8} くらい小さいならば，古典的に説明できることを示せ（ηは，万有引力ポテンシャルに対する摂動の逆2乗法則に従うポテンシャルの大きさの目安である）．
（水星の軌道の離心率は 0.206 であり，その周期は 0.24 年である.）[1)]

15. 前の問題のポテンシャルにおいて，r^{-2} のように振舞うポテンシャルの付加項は，等価な1次元ポテンシャルにおける遠心力の障壁の項に大変よく似ている．なぜそのとき付加された力は軌道の歳差運動を引き起こすか．一方，障壁に対して l を変化させる

1) 初版第3章演習問題7を参照.

ことによって力を付け加えると，軌道の歳差運動を引き起こさないのはなぜか．

16. 1年の長さと太陰月（lunar month）の長さ（27.3日），および地球の軌道の平均半径 (1.50×10^8 km) と月の軌道の平均半径 (3.8×10^5 km) だけを使って，地球の質量に対する太陽の質量の比を近似的に求めよ．

17. 万有引力の場の中での楕円運動に対して，動径速度が，

$$\dot{r}=\frac{\omega a}{r}\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}\ ,$$

のように書かれることを示せ．r のかわりに離心近点離角（eccentric anomaly）変数 ψ を導入し，結果として得られる ψ についての微分方程式が直ちに積分できて，Kepler の方程式を与えることを示せ．

18. もし離心率 e が小さいならば，ωt の関数としての離心近点離角 ψ に対する Kepler の方程式（3－76）は，ψ より $e\sin\psi$ の項を低次として扱うような逐次的な手法でコンピューターによって容易に解かれる．n 番目の逐次解を ψ_n と表わせば，明らかに逐次的関係，

$$\psi_n=\omega t+e\sin\psi_{n-1}\ ,$$

p.124
がある．この逐次的手続きを使って，e のべき展開による解析的な形を少なくとも e^2 の項まで求めよ．

19. ωt による Fourier 級数に $e\sin\psi$ を展開することによって，Kepler の方程式が形式的な解

$$\psi=\omega t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}J_n(ne)\sin n\omega t\ ,$$

を持つことを示せ．ここで J_n は n 次の Bessel 関数である．変数の値が小さいとき，Besscl 関数は変数のべき級数で近似される．それに応じて，この結果から，ψ の e のべき級数展開における最初の数項を導け．Bessel 関数についての良い情報源は，Abramowitz and Stegun による，“Handbook of Mathematical Functions”であり，特に p. 360 である．

20. もし，差 $\psi-\omega t$ が によって表わされるならば，Kepler の方程式は，

$$\rho=e\sin(\omega t+\rho)\ ,$$

と書かれる．$\sin\rho$ を ρ の Taylor 級数に展開し，次にその ρ を Kepler の方程式によって与えられる式によって置き換えることによって，ρ の逐次近似が得られる．ρ に対する第1近似は，

$$\tan\rho_1 = \frac{e\sin\omega t}{1 - e\cos\omega t}$$

によって与えられる ρ_1 であり，そしてその次の近似は e^4 のオーダーの項まで正確な式である

$$\sin(\rho_2 - \rho_1) = -\frac{1}{6}e^3\sin^3(\omega t + \rho_1)(1 + e\cos\omega t),$$

から求められることを示せ．

21. 近日点を通過してから，次に近日点を通過するまでの間の地球の周期（近点年 (anomalistic year)）は 365.2596 平均太陽日であり，軌道の離心率は 0.0167504 である．Kepler の楕円軌道運動を仮定すれば，地球は近日点から出発して ¼ 近点年に，軌道中で角度にしてどの位遠くまで動くか。角度1秒またはそれより良い精度で結果を出せ．計算器またはコンピューターでの数値計算を含むどんな方法を使ってもよい．

22. $1/r$ ポテンシャルの中での双曲線運動において，離心近点離角に対応するのは

$$r = a(e\cosh F - 1),$$

で定義される F である．ここで $a(e-1)$ は最近接距離である．最近接の時刻からの時間 t を与える，Kepler の式に対応する式を，F の関数として求めよ．

23. **磁気単極子**（*magnetic monopole*）は，（もしそれが存在するならば），$\mathbf{B} = b\mathbf{r}/r^3$ の形の磁場の特異性によって定義される．ここで b は定数（いわば磁荷の尺度）である．質量 m の粒子がポテンシャル $V(r) = -k/r$ から導かれる中心力の場と磁気単極子の場の中を運動するものとしよう．

a) （1－61）式で与えられる Lorentz の力を使って，Newton の運動方程式の形を求めよ．ベクトル積 $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}$ を調べることによって，（力が非中心力であるから）力学的角運動量は保存されないが，

$$\mathbf{D} = \mathbf{L} - \frac{qb}{c}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

という保存ベクトルがあることを示せ．

p.125
b) （3－79）式から（3－82）式へと導かれる段階に平行的に，Laplace－Runge－Lenz ベクトルに類似の保存ベクトルがあることを示せ．この場合，ベクトル $\mathbf{D}$ は純粋な Kpeler の問題における角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ と同様な役割を演ずる．

24. もし粒子の速度または運動量のベクトルが，力の中心から出発するように平行移動されるならば，そのときベクトルの先端の軌跡は粒子の**ホドグラフ**（*hodograph*）を描く．これは力学の歴史において，かなり時代がかった軌跡曲線であるが，宇宙船の力学との関係においていくらかリバイバルしてきている．$\mathbf{L}$ と Laplace－Runge－Lenz ベ

クトルAとのベクトル積をとることによって，Keplerの楕円運動に対するホドグラフは，運動量に関して，y 軸上で力の中心から A/l 変位した距離の所にある中心を持った，半径 mk/l の円であることを示せ．

25. Rutherford 散乱において，Coulomb 力が斥力ではなくて引力であったなら，もし変わるものがあるとすればそれは何か．

26. 斥力の中心力 $f = kr^{-3}$ によって生ずる散乱を調べよ．その微分断面積は，

$$\sigma(\Theta)\,d\Theta = \frac{k}{2E}\,\frac{(1-x)\,dx}{x^2(2-x)^2\sin\pi x},$$

で与えられることを示せ．ただし，$x = \Theta/\pi$ で，E はエネルギーである．

27. 原子核物理学でしばしば出会う中心力ポテンシャルは，

$$\begin{aligned} V &= 0, & r &> a. \\ &= -V_0, & r &\leqslant a. \end{aligned}$$

で定義される，いわゆる**矩形井戸型**（*rectangular well*）ポテンシャルである．古典力学では，そのようなポテンシャルによって生ずる散乱は，半径が a，相対屈折率が，

$$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}},$$

の球による光線の屈折と同じであることを示せ（この等価性が，なぜ Huygens の波と Newtonの力学的な微粒子の描像との，どちらによっても屈折の現象を説明することができたかを示している）．また，微分断面積は，

$$\sigma(\Theta) = \frac{n^2a^2}{4\cos\dfrac{\Theta}{2}}\,\frac{\left(n\cos\dfrac{\Theta}{2} - 1\right)\left(n - \cos\dfrac{\Theta}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n\cos\dfrac{\Theta}{2}\right)^2},$$

となることを示せ．全断面積はいくらか．

28.
$$\begin{aligned} V &= \frac{k}{r}, & r &> a, \\ &= \frac{k}{a}, & r &\leqslant a; \end{aligned}$$

のように定義された，$r = a$ で切りとられた斥力Coulomb ポテンシャルを考えよう．全エネルギー E が $E > k/a$ である粒子に対して，散乱角 Θ を s/s_0 の関数として求めよ．ここで s_0 は衝突径数である．その衝突径数に対して最近接点は点 $r = a$ で現われる
p.126
（その公式は閉じた形で与えることができるが，それらは簡単ではない）．Θ の s/s_0 に

対する数値的関係を，特別な場合，$E = 2k/a$ に対してグラフに描け．この特殊な場合に対して，s/s_0 に関する Θ の依存性から，角度散乱断面積について何を導き出すことができるか．

29. 一部が切り取られたCoulombポテンシャルのもう1つの形は，

$$V = \frac{k}{r} - \frac{k}{a}, \qquad r > a$$
$$= 0, \qquad r < a.$$

である．散乱角と微分断面積に対する閉じた形の式を求めよ．これらは，a を単位にした最近接の距離を測るパラメーターによって最も便利に表わされる．全断面積はいくらか．

30. 斥力による散乱に対して，衝突径数 s の関数としての散乱角に対する（3―96）式は，ある関数 $\rho(r)$ へ積分変数を変換することによって，

$$\Theta = \pi - 4s\int_0^1 \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{r_m^2\left[1 - \frac{V}{E}\right] - s^2(1-\rho^2)^2}},$$

または，

$$\Theta = \pi - 4s\int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{r_m^2}{\rho^2 E}[V(r_m) - V(r)] + s^2(2-\rho^2)}},$$

のように書くことができることを証明せよ．斥力ポテンシャルに対して，被積分関数は $r \to r_m$ の極限において決して特異点を持たないことを示せ．積分の範囲が一定になっているために，これらの公式は $\Theta(s)$ の数値計算をするのに好都合であり，当然Gauss―Legendre の数値積分法を使うことができる．

31. 斥力ポテンシャルが，

$$V = \frac{V_0}{1+r},$$

で全エネルギーが $E = 1.2V_0$ であるとき，前の演習問題の公式を使って $\Theta(s)$ と微分断面積 $\sigma(\Theta)$ を数値計算せよ．Gauss―Legendre の数値積分で分点の数を16にとれば，十分な精度を与えるであろう．散乱は虹（rainbow）を示すか？

32. もし斥力ポテンシャルが，r が大きくなるにつれて単調に減少するならば，$V(r_m)$ に比べて大きなエネルギーに対して散乱角は小さいであろう．これらの条件の下で，（3―97）式を取り扱うと，ふれの角は近似的に，

$$\Theta = \frac{1}{E}\int_0^1 \frac{[V(u_m) - V(u)]\,dy}{(1-y^2)^{3/2}},$$

で与えられることを示せ．ここで y はもちろん u/u_m である．

さらに，もし $V(u)$ が n を正の整数として Cu^n の形であるならば，高エネルギーの極限において断面積は $\Theta^{-2(1+1/n)}$ に比例することを示せ．

p.127

33. a) 散乱される粒子の入射方向と標的粒子の反跳の方向がなす角は単に $\Phi = \frac{1}{2}(\pi - \Theta)$ であることを示せ．

b) 弾性散乱において，散乱断面積は Θ に関して等方的であることが観察されている．入射粒子の散乱後のエネルギー E_1 および標的粒子の反跳エネルギー E_2 に対する対応する確率分布はどうなるか．

34. 実験室系における散乱角 ϑ は，散乱前のエネルギー E_0 および散乱後のエネルギー E_1 と，

$$\cos\vartheta = \frac{m_2 + m_1}{2m_1}\sqrt{\frac{E_1}{E_0}} - \frac{m_2 - m_1}{2m_1}\sqrt{\frac{E_0}{E_1}} + \frac{m_2 Q}{2m_1\sqrt{E_0 E_1}},$$

によって関係づけられることを示せ．

第4章 剛体の運動学

p.128
前に，剛体というのは，対にとったすべての質点間の距離が，運動を通じて一定であるというホロノミックな拘束を受けている質点系のことであると定義した．この剛体の概念は，幾分理想化されたものではあるが，きわめて有用なものであって，その力学は十分に説明しておく価値がある．この章では，主として，剛体の**運動学**（*kinematics*），すなわち，その運動の本質と特徴とを論ずる．しばらくの間は，このために必要な数学的手法を展開することに費そう．その手法は，それ自身，かなり興味のあるものであり，物理学の他の分野に対する応用も多いものである．剛体の運動の記述の方法を学んでから後に，次の章では，そのような運動が，加えられた力とトルクによって，どのような具合に起こるかを，ラグランジアン形式の枠の中で論じる．

4−1 剛体の独立な座標

剛体の運動を議論する前に，まず第１に，その配置を明確に指定するためには，何個の独立な座標が必要であるかを，明らかにしておかなければならない．N 個の質点から成る剛体は，高々$3N$個の自由度をもつものであるが，この自由度は，

$$r_{ij} = c_{ij}, \qquad (4-1)$$

の形で表わすことのできる拘束によって，非常に減らされる．ここで r_{ij} は，i 番目と j 番目の質点の間の距離で，c_{ij} は定数である．実際の自由度の数は，単に$3N$から，拘束の式の数を引き去ることによって，得ることはできない．な

ぜなら，（４－１）の形の可能な式は $\frac{1}{2}N(N-1)$ 個あって，大きい N の値に対しては，$3N$を越えるからである．しかし，実際には，（４－１）の形の式がすべて独立であるわけではない．剛体内の１点を定めるには，その点から剛体内の他のすべての点までの距離を指定する必要はない．同一直線上にない，任意の３点までの距離を指定するだけで十分である（図４－１参照）．このようにして，剛体を作っている質点のうちの３つの位置を決めさえすれば，剛体の拘束によって，残りのすべての質点の位置が確定する．したがって，自由度の数は９個より多いことはあり得ない．しかし３つの基準点自身も独立ではない．実

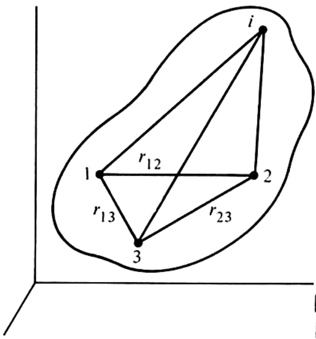


図４－１
剛体内の１点の位置を，３つの基準点からの距離によって定める説明図．

p. 129
際，これらには３つの剛体の拘束の式

$$r_{12}=c_{12},\qquad r_{23}=c_{23},\qquad r_{13}=c_{13},$$

が課されている．これによって，自由度の数は６個に減少する．６個の座標だけで十分であることは，次の考察からも確かめることができる．すなわち，基準点の１つの位置を確定するためには，３個の座標を与えなければならないが，一度，点１が指定されると，点２は点１を中心とする球面上を動くように拘束されるから，点２は２個の座標だけで，明確に指定することができる．さらに，この２点が定まると，点３は，他の２点を結ぶ軸のまわりに回転しうるだけであるから，ただ１個の自由度をもつだけになる．したがって，６個の座標だけで十分なのである．

このようにして，空間における剛体は，その配置を明確に指定するのに，6個の独立な一般化座標を必要とする．それがどんなに多くの質点を含んでいても，——連続体の極限においてさえも——同じである．もちろん，剛体的な拘束のほかに，その剛体に対する付加的な拘束があるかも知れない．例えば，剛体が，1つの面の上を運動したり，あるいは，1点が固定されて運動するように，拘束されているという場合もあり得る．そのような場合には，付加的な拘束のために，自由度の数，すなわち独立な座標の数は，さらに減少する．

これらの座標は，どのように指定したらよいであろうか？ 剛体の配置は，外部の空間に固定された直交座標軸に対して，その剛体に固定された直交座標軸（図4－2に示してある，プライムのついた軸）の位置を定めることによって，完全に指定されることがわかるであろう．この“剛体”座標軸の原点の座標を指定するためには，明らかに3個の座標が必要である．そうすると，残りの3個の座標は，外部座標軸に平行ではあるが，プライムのついた座標軸と同じ原点をもつ座標系に対して，プライムのついた座標軸の方位を指定するものでなければならない．

1つの直交座標軸の方位を，同じ原点をもつ他の座標軸に関係して指定する仕方はいろいろある．最も有効な方法は，プライムのついた軸の方向余弦を，プライムのつかない軸に関係して定めることである．すなわち，x'軸は，その

p 130

x, y, z 軸に関する3つの方向余弦$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$によって指定することができる．通常よくするように，$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$を，$x, y, z$ 方向の3つの単位ベクトルとし，$\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ を，

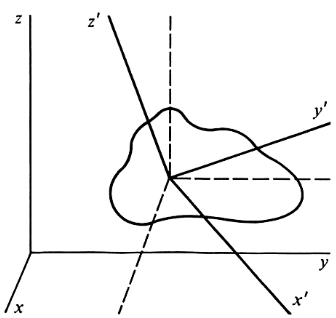


図4－2
プライムのつかない座標軸は，外部基準座標軸を表わす．プライムのついた軸は剛体に固定されている．

プライムのついた系で同じ役目を果たすベクトルとすれば，これらの方向余弦は，次のように定義される．

$$\alpha_1 = \cos(\mathbf{i}', \mathbf{i}) = \mathbf{i}'\cdot\mathbf{i}$$
$$\alpha_2 = \cos(\mathbf{i}', \mathbf{j}) = \mathbf{i}'\cdot\mathbf{j} \qquad (4-2)$$
$$\alpha_3 = \cos(\mathbf{i}', \mathbf{k}) = \mathbf{i}'\cdot\mathbf{k}.$$

ベクトル $\mathbf{i}'$ は，次の関係式，

$$\mathbf{i}' = (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{k})\mathbf{k},$$

あるいは，

$$\mathbf{i}' = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}, \qquad (4-3)$$

によって， $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ で表わすことができる．同じように x, y, z 軸に関する y' 軸の方向余弦を， $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ とすれば，これは，プライムのつかない基準座標系における $\mathbf{j}'$ の成分である．すなわち，

$$\mathbf{j}' = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}, \qquad (4-4)$$

である．$\mathbf{k}'$に対しても， γ_i で示される z' 軸の方向余弦を用いて，（４－４）と同
p. 131
じような式を書くことができる．こういうわけで，９個の方向余弦によって，

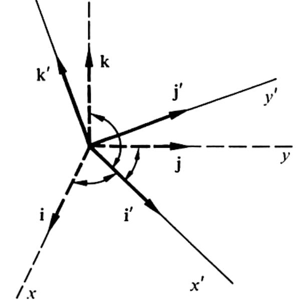


図４－３
剛体に固定された軸の，外部固定軸に対する方向余弦．

x, y, z 軸の組に対する x', y', z' 軸の方位が完全に指定される．この手続きを逆にすれば，同じように，これらの方向余弦を用いて，単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を，プライムのついた軸の方向の成分で表わすこともできる．すなわち，

$$\mathbf{i} = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}',$$

あるいは，

$$\mathbf{i} = \alpha_1\mathbf{i}' + \beta_1\mathbf{j}' + \gamma_1\mathbf{k}', \tag{4-5}$$

と書くことができる．$\mathbf{j}$ と $\mathbf{k}$ に対しても，同じような式が成立する．

方向余弦はまた，与えられた点の１つの系における座標と，他の系における座標の間の関係を直接に与える．すなわち，与えられた基準系における１つの点の座標は，位置ベクトル $\mathbf{r}$ の，その系の座標軸方向の成分である．したがって，x' 座標は，x, y, z を用いて，

$$x' = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{i}') = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$

で与えられ，他の座標に対しては，

$$\begin{aligned} y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \tag{4-6}$$

が得られる．ここで，ベクトル $\mathbf{r}$ の成分に対して行ったことは，明らかに任意のベクトルについて行うことができる．$\mathbf{G}$をあるベクトルとすれば，$\mathbf{G}$のx'軸方向の成分は，その x, y, z 成分と，

$$G_{x'} = (\mathbf{G}\cdot\mathbf{i}') = \alpha_1 G_x + \alpha_2 G_y + \alpha_3 G_z,$$

の関係がある．他の成分についても同様である．このようにして，９個の方向余弦によって，２つの座標系の間の変換は完全にわかるのである．

プライムのついた系を剛体に固定してとると，９個の方向余弦は，運動中に物体が方向を変えるために，時間の関数となる．この意味で，$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ は空間に固定されているが，剛体に固定された座標軸と共通の原点をもつ座標系に関する，剛体の瞬間的な方位を記述する座標であると考えることができる．しかし，明らかに，これらは独立な座標ではない．なぜなら，それらは９個ある

のに，方位を指定するには，すでに示したように，３個の座標が必要なだけだからである．

方向余弦の間の関係は，両方の座標系の基底ベクトルが，いずれも互いに直交し，かつ単位の大きさをもっているという事実から生ずるものである．すなわち，記号で書けば，

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0,$$

および，

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1, \qquad (4-7)$$

p. 132
であって，$\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$についても，同じような関係が成立する．９個の係数（方向余弦）の満足する条件は，((４－５)式のように）$\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$で表わした$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$の式の間で，可能なすべてのスカラー積を作り，(４－７)式を用いることによって得られる．すなわち，

$$\begin{aligned}\alpha_l\alpha_m+\beta_l\beta_m+\gamma_l\gamma_m&=0, \qquad l,m=1,2,3;\ l\neq m,\\ \alpha_l^2+\beta_l^2+\gamma_l^2&=1, \qquad l=1,2,3.\end{aligned} \qquad (4-8)$$

である．それぞれ３個の式から成るこれら２組の式は，独立な量の数を９個から３個に減らすのにちょうど十分である．形式的には，この６個の式は，

$$\begin{aligned}\delta_{lm}&=1 \qquad l=m\\ &=0 \qquad l\neq m,\end{aligned}$$

で定義される，Kroneckerのδ-記号，δ_{lm}を用いて，１つにまとめることができる．この記号を用いると，(４－８)式は，

$$\alpha_l\alpha_m+\beta_l\beta_m+\gamma_l\gamma_m=\delta_{lm}, \qquad (4-9)$$

と書くことができる．

したがって，９個の方向余弦を一般化座標としてラグランジアンを作り，それから運動方程式を定めることはできない．この目的のためには，互いに独立な，方向余弦の３個の関数のある１組を用いなければならない．独立変数として用いることのできる，そのような組については，後にいくつか述べるが，最

も重要なものは，Eulerの角である．しかし，このような事情があるにもかかわらず，2つの直交座標系の間の関係を，方向余弦を用いて記述することには，多くの重要な利点がある．これを用いると，剛体の運動に関する多くの法則を，大変きれいに，また非常に一般的な形で，そしてまた，特殊相対性理論および量子力学において必然的に用いられる手続きに自然に導かれるような形に，表わすことができるのである．したがって，そのような記述の仕方は，ここで十分に論じておく価値がある．

4—2　直交変換

9個の方向余弦の性質の研究をさらに容易にするためには，記号を変えて，すべての座標を x で表わし，軸の区別は，添字を下に書いて示すのが便利である．すなわち，

$$
\begin{aligned}
x &\to x_1 \\
y &\to x_2 \\
z &\to x_3,
\end{aligned}
\tag{4-10}
$$

とするのである．そうすると，(4－6)式は，

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\
x'_2 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \\
x'_3 &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3,
\end{aligned}
\tag{4-11}
$$

p.133
となる．(4－11)式は，1つの座標の組 x_1, x_2, x_3 から，新しい組 x'_1, x'_2, x'_3 への変換式の1つの群を構成する．これらは特に，次の形の変換式，

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\
x'_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\
x'_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3,
\end{aligned}
\tag{4-12}
$$

によって定義される**1次変換**(*linear transformation*)，あるいは**ベクトル変換**(*vector transformation*)の1つの例になっている．ここで，$a_{11}, a_{12}, \ldots$ は

任意の，一定な（x, x'に依存しない）係数の組である*．多くの場合にこれらの表現の見かけを簡単にするために，最初Einsteinによって導入された和に関する規約を用いることにしよう．すなわち１つの項の中に１つの添字が２度あるいはそれ以上現われるときにはいつでも，他の記号は何も書いてなくても，その項は，その添字のとり得るすべての値について加え合わされるということにする．こうすると，（４－12）式は，この規約によって，極めて簡潔に，次のように書くことができる．

$$x_i' = a_{ij}x_j, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{4－12′}$$

添字jが繰り返して現われることは，（４－12′）式の右辺が，ダミー添字といわれるjのすべての可能な値（ここでは$j = 1, 2, 3$）にわたってとられた和であることを示している．ある添字のついた量のべきが現われるときには，いくらかの曖昧さが起こりうる．そういうわけで，

$$\sum_i x_i^2,$$

のような表現は，和の規約を使うときには，

$$x_i x_i,$$

のように書くことにする．**本書では，今後，特に断わらない限り，方程式を読むときには，和の規約が自動的に用いられる．** 便利なときあるいは曖昧さを除くために，和の記号が時には陽に書き表わされることがある．例えば，添字のあるいくつかの値が和の中から除かれなければならないようなときである．

（４－11）式によって表わされた変換は，（４－12）式によって表わされる一般の１次変換の１つの特別な場合にすぎない．それは，方向余弦は全部が独立ではないからである．（４－８）式に示した係数間の関係を，ここでもう一度新しい記法で導いてみよう．どちらの座標系も直交座標系であるから，ベクトルの大きさは，成分の２乗の和で与えられる．さらに，実際のベクトルはどちら

---

*）もちろん，（４－12）式は，変換方程式の最も一般的なものではない。例えば$\mathbf{r}$の組からqの組への変換（１－38）式を参照せよ．

の座標系を用いても変わらないから，ベクトルの大きさは，両方の系で同じでなければならない．記号的には，大きさの不変性は，次のように表わすことができる．

$$x'_i x'_i = x_i x_i. \qquad (4-13)$$

p. 134
(4－13)式の左辺は，それゆえ

$$a_{ij}a_{ik}x_j x_k,$$

であって，これが(4－13)式の右辺に等しくなるのは，

$$\begin{aligned} a_{ij}a_{ik} &= 1 \qquad j = k \\ &= 0 \qquad j \neq k, \end{aligned} \qquad (4-14)$$

のとき，あるいはもっと簡潔な形で，

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \qquad j,k = 1,2,3, \qquad (4-15)$$

であるとき，かつそのときに限る．係数 a_{ij} を，α, β, γ を用いて表わせば，(4－15)式に含まれている6個の式は，(4－9)式と同じものになる．

(4－15)式の要求する性質をもった任意の1次変換(4－12)は**直交変換**(*orthogonal* transformation)と呼ばれ，(4－15)式自身は**直交条件**(*orthogonality condition*)として知られている．このように，空間に固定した座標から，物体に固定した(共通の原点をもつ)座標へ移ることは，1つの直交変換によってなし遂げられる．変換の量(方向余弦)を，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad (4-16)$$

のように書き並べたものを，**変換行列**(*matrix of transformation*)と呼び，大文字**A**で表わす．これに対応して，量 a_{ij} は変換の**行列要素**(*matrix elements*)として知られている．

このような形式的考察を，もっと意味深いものとするために，平面内における運動という簡単な例を考えよう．この場合には，2次元の座標系に制限され

る．そうすると，上の多くの関係式における添字は，１と２の値をとることができるだけであって，変換の行列は，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

の形になる．４個の行列要素は，３個の直交条件，

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \qquad j, k = 1, 2,$$

によって関係づけられる．したがって，変換を指定するためには，ただ１個の独立なパラメーターが必要なだけである．しかし，この結論は驚くにあたらない．２次元における，１つの直交座標系から別の直交座標系への変換は，平面における座標軸の回転に相当する（図４－４参照）．そして，そのような回転は，ただ１つの量，すなわち回転角 ϕ によって完全に指定することができる．このただ１つのパラメーターで表わすと，変換式は，

$$x_1' = x_1 \cos\phi + x_2 \sin\phi$$
$$x_2' = -x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi,$$

p. 135
となる．したがって行列要素は，

$$a_{11} = \cos\phi, \qquad a_{12} = \sin\phi,$$
$$a_{21} = -\sin\phi, \qquad a_{22} = \cos\phi, \qquad (4-17)$$

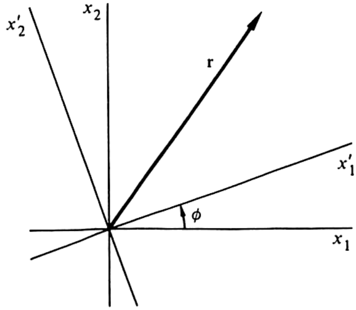


図４－４
２次元の直交変換と等価なものとしての座標軸の回転.

であるから，行列 **A** は

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad (4-17')$$

と書くことができる．3個の直交条件は次の式に展開される．

$$a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} = 1$$
$$a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} = 1$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

これらの条件は，明らかに（4－17′）式の行列によって満足されている．なぜなら（4－17）式の行列要素を用いて書けば，これらは次のような恒等式になるからである．

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$
$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$$
$$\cos\phi\sin\phi - \sin\phi\cos\phi = 0.$$

変換の行列 **A** は，プライムのつかない系に作用して，これをプライムのついた系に変換する1つの**演算子**（*operator*）であると考えることができる．この手続きは，記号的に，

$$(\mathbf{r})' = \mathbf{A}\mathbf{r}, \qquad (4-18)$$

と書くことができる．これは次のように読むべきものである．すなわち，行列 **A** はプライムのつかない系におけるベクトルの成分に作用して，同じベクトルのプライムのついた系における成分を与える．さて，これまで話を進めた所では，**A** は座標系のみに作用し，ベクトルは不変であって，単に異なる座標系における p. 136 その成分だけを問題にしている，ということを強調しておかなければならない．したがって，（4－18）式では，両辺に同じベクトルが含まれていることを明らかにするために，左辺の **r** に括弧をつけておいたのである．ベクトル自身は変わらず，成分だけが変わるのである．2次元では，すでに見てきたように，座標の変換は単なる回転であって，この場合には，**A** は平面における**回転**（*rotation*）の演算子にほかならない．

それにもかかわらず，数学的な形式を変えることなしに，**A**をまた，ベクトル **r** に作用して，これを異なるベクトル **r**′ に変える演算子であると考えることもできる，ということを指摘しておかなければならない．すなわち，

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}, \qquad (4-19)$$

とおいて，**両方のベクトルは共に同じ座標系で表わされている**，と考えるのである．こういうわけで，２次元では，座標系を反時計まわりに回転する代わりに，ベクトル **r** を時計まわりに角 ϕ だけ回転して新しいベクトル **r**′ を作ることができる．そうすると，新しいベクトルの成分は，座標の変換を記述するものと同じ式，すなわち(４－12)式によって元のベクトルの成分と関係づけられる．したがって，形式的な立場からいえば，(４－18)式で括弧を用いる必要はない．むしろ(４－19)式のように書いて，座標系，あるいはベクトルに対する１つの演算として，同じように解釈することができる．数学的な取り扱いは，この２つの見方のどちらに従っても同じである．剛体の方位を指定するために，直交変換を利用する場合には，座標に作用する演算子と考える方が適切であるが，他方，１つのベクトルを他のベクトルに変える演算子という考え方には，もっと広い応用がある．数学的な議論では，情況に合うように，どちらの解釈でも自由に用いてよい．もちろん，**A**で表わされる演算の性質は，どちらの解釈を選ぶかに応じて変わるということは強調しておかなければならない．このように，もし**A**が，座標系に適用されたときに**反時計まわり**の角 ϕ の回転に対応するならば，ベクトルに適用されたときには**時計まわり**の回転に対応する．

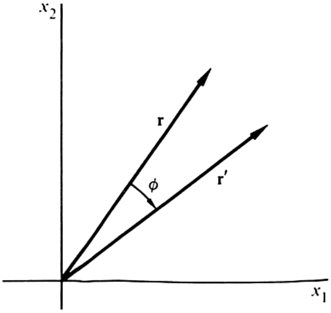


図４－５
直交変換を，座標系を変えずに，ベクトルを回転するものと解釈することの説明図．

同じような，役割の２重性は，直交変換よりももっと一般的な，他の型の座標変換に対しても，しばしば生ずる．それらは，時には，座標系にのみ影響を与えるものとみなされるであろう．そのときには，ある与えられた量あるい
p.137
は関数を，新しい座標系で表わすものである．またときには，それらは，量あるいは関数それ自身に作用するものと考えられるであろう．そのときには量あるいは関数を，同じ座標系の中で変化させるのである．変換を，座標系にのみ作用するものと考えるとき，われわれはそれを変換の**受動的**（*passive*）役割という．**能動的**（*active*）な意味では，変換は，ベクトルあるいは他の物理量を変化させるものとみなすのである．これら両方の変換の解釈は，以下（第９章参照）で考える，古典力学のいろいろな定式化において出会うことになるが，また事実，物理学の多くの分野で現われるであろう．

固定された原点のまわりの剛体の運動の運動学をさらに展開するためには，われわれは，変換行列の演算を支配する代数を多く用いることになるであろう．そこで，次の節では行列代数の基礎的なことを簡単に要約し，その直交行列への特別な応用を付け加えることにする．数学のこの分野に親しみのない読者に対しては，次の節は，当面の目的に対して適当な手引きを与えるはずである．そこでの題材は，われわれが使用する特別な術語や記号を詳述するのにも役立つ．しかし，行列代数とすでに十分親しみ深くなっている読者は，次の節をとばして，直接第４－４節へ進んでよい．

4―3　変換行列の形式的性質

剛体が引き続いて２回の変位を行うことに対応して，２つの変換が引続いて行われると，どうなるかを考えてみよう．$\mathbf{r}$ から $\mathbf{r}'$ への最初の変換を $\mathbf{B}$ で表わし，

$$x'_k = b_{kj}x_j, \qquad (4-20)$$

これに続く，$\mathbf{r}'$から第３の座標の組 $\mathbf{r}''$ への変換を $\mathbf{A}$ で表わすことにしよう．

$$x''_i = a_{ik}x'_k. \qquad (4-21)$$

そうすると，x''_i と x_j の間の関係は，２つの式（4－20）と（4－21）を結びつけることによって得られ，

$$x_i'' = a_{ik} b_{kj} x_j ,$$

となる．これはまた次のように書くこともできる．

$$x_i'' = c_{ij} x_j . \qquad (4-22)$$

ここで，

$$c_{ij} = a_{ik} b_{kj} , \qquad (4-23)$$

である．このようにして，２つの直交変換 **A**，**B** を引き続いて行うことは，第３の１次変換 **C** と同等になる．**A**，**B** の直交性のために，**C** もまた直交変換になることを証明することができる．詳しい証明は演習のために残しておこう．記号的には，合成演算子 **C** は，演算子 **A** と **B** の積と考えることができる．すなわち，

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} .$$

p. 138
その行列要素 c_{ij} は，定義によって，２つの正方(square)行列 **A** と **B** とを掛け合わせて得られる正方行列の要素である．

この"行列"あるいは演算子の掛け算は，一般に交換可能ではないことに注意しよう．すなわち，

$$\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB} ,$$

である．なぜなら，定義によって，変換 $\mathbf{D} = \mathbf{BA}$ の要素は，

$$d_{ij} = b_{ik} a_{kj} , \qquad (4-24)$$

であって，一般に **C** の行列要素(4－23)式とは一致しないからである．したがって，最後の座標系は，演算子 **A** と **B** を適用する順序，すなわち，最初に **A**，次に **B** を適用するか，最初に **B**，そして次に **A** を適用するかによって違ってくる．しかし，行列の掛け算に対して，結合法則は成立する．３個あるいはそれ以上の行列の積において，掛け算(*multiplication*)をどのような順番で行うかは問題でない．すなわち，

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) , \qquad (4-25)$$

が成立する．

（4－19）式で，演算子**A**が座標系（あるいはベクトル）に作用することを示すために，**A**と**r**を並べておくことは，単に記号的なものであるといった．しかし，行列という概念を拡張することによって，それを実際の行列の掛け算を示すものと考えることもできる．いままで使ってきた行列は正方行列で，行と列の数の等しいものであった．しかし，

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \tag{4－26}$$

で定義される，**x**と**x**′のような1列行列（one-column matrix）を用いることもできる．積**Ax**は，行列の掛け算の定義によって，その要素が，

$$(\mathbf{Ax})_i = a_{ij}x_j = x'_i,$$

であるような1列行列である．したがって（4－19）式は，行列方程式として

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax},$$

と書くこともできる．

2つの行列の加法（*addition*）は，掛け算（乗法）ほど重要な概念ではないが，しばしば用いられる演算である．和**A**＋**B**は，その要素が，**A**と**B**の対応する要素の和に等しい行列**C**のことである．すなわち，

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

である．

もっと重要なのは，**A**と逆の変換，すなわち**r**′をもとの**r**に戻す演算である．この変換を$\mathbf{A}^{-1}$と呼び，その要素をa'_{ij}で示すことにしよう．そうすると，つぎのような方程式の組が得られる．

$$x_i = a'_{ij}x'_j. \tag{4－27}$$

この式は，

$$x'_k = a_{ki}x_i, \tag{4－28}$$

p. 139
と両立しなければならない．(4－27)式で与えられる x_i を代入すると，(4－28)式は，

$$x'_k = a_{ki}a'_{ij}x'_j, \qquad (4-29)$$

となる．$\mathbf{r}'$ の成分は独立であるから，(4－29)式は和が，恒等的に x'_k になる場合に限って正しい．したがって，x'_jの係数は $j = k$ ならば 1 で，$j \neq k$ ならば零でなければならない．記号で書けば，

$$a_{ki}a'_{ij} = \delta_{kj}, \qquad (4-30)$$

である．(4－30)式の左辺は，積 $\mathbf{AA}^{-1}$ の行列要素であることが容易にわかる．それに対して，右辺は単位行列 (unit matrix) **1**，すなわち，

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (4-31)$$

として知られている行列の要素である．したがって (4－30)式は，

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{1}, \qquad (4-32)$$

と書くことができる．この式によって逆行列を $\mathbf{A}^{-1}$ と書く理由がわかる．**1** に相当する変換は，**恒等変換** (*identity transformation*) として知られているものであって，座標系に何の変化も生じさせない．すなわち，

$$\mathbf{x} = \mathbf{1x},$$

である．同じように，任意の行列 **A** に，どんな順序で **1** を掛けても，**A** は変わらない．すなわち，

$$\mathbf{1A} = \mathbf{A1} = \mathbf{A},$$

である．

(4－32)式の証明の順序を少し変更すれば，**A** と $\mathbf{A}^{-1}$ の順序が交換できることを示すことができる．x_i を x' で表わして，(4－28)式に代入する代わりに，2 つの方程式から x' を消去することによっても，それらが両立することを同じ

ように要求することができる．そうすると，前と同じようにして，

$$a'_{ij}a_{jk}=\delta_{ik},$$

が得られる．これを行列記法で書けば，

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{1}, \tag{4-33}$$

となる．これで $\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}^{-1}$ が交換可能であることが証明された．

次に，２重和，

$$a_{kl}a_{ki}a'_{ij},$$

を考えよう．これは

$$c_{li}=a_{kl}a_{ki}\quad \text{として，}\quad c_{li}a'_{ij},$$

あるいは，

$$d_{kj}=a_{ki}a'_{ij}\quad \text{として，}\quad a_{kl}d_{kj},$$

のどちらの形にも書くことができる．

p. 140
直交条件（４－15）式を適用すると，第１の形の和は，

$$\delta_{li}a'_{ij}=a'_{lj},$$

となる．他方，第２の観点からすると，（４－30）式を用いて和は，

$$a_{kl}\delta_{kj}=a_{jl},$$

と書くことができる．したがって，行列 $\mathbf{A}$ とその逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ の要素は，

$$a'_{lj}=a_{jl}, \tag{4-34}$$

によって関係づけられる．一般に，行列 $\mathbf{A}$ から，行と列とを交換して得られる行列は**転置行列**（*transposed matrix*）として知られ，$\tilde{\mathbf{A}}$ で示される．それゆえ（４－34）式は，**直交行列**（*orthogonal matrix*）に対しては，逆行列が転置行列と同一でなければならないことを示すものである．記号で書けば，

$$\mathbf{A}^{-1}=\tilde{\mathbf{A}}, \tag{4-35}$$

である．この結果を（４－33）式に入れると，

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{1}, \qquad (4-36)$$

が得られる．これは，直交条件の組（4－15）を短縮して書いたものと同じである．このことは，直接展開してみれば確かめることができる[*]．同じように，（4－30）式に（4－34）式を代入することによって，直交条件の別の形が得られる．すなわち，

$$a_{ki}a_{ji} = \delta_{kj}, \qquad (4-37)$$

である．これは記号的な形では，

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{1},$$

と書くことができる．この式は，（4－36）式に左から $\mathbf{A}$，右から $\mathbf{A}^{-1}$ を掛けることによって，直接導き出すことができる．

m 行 n 列の行列，すなわち，行列要素を a_{ij} とするとき，i が 1 から m まで，j が 1 から n まで変わるような，長方形の行列は，その次元が $m \times n$ であるといわれる．明らかに，そのような行列の転置行列は，$n \times m$ の次元をもっている．ベクトルの 1 列行列を，次元 $m \times 1$ の長方形行列と考えるならば，そのベクトルの転置行列は $1 \times m$ の次元をもっている．すなわち 1 行行列である．2 つの長方形行列の積 $\mathbf{AB}$ は，$\mathbf{A}$ の列の数と $\mathbf{B}$ の行の数が等しいときに限って存在する．
p. 141
これは積をつくる演算の定義の明らかな結果であって，積の行列要素は，

$$c_{ij} = a_{ik}b_{kj},$$

となる．この観点からすると，ベクトルの 1 列行列と，正方行列の積は存在しない．これらの量の間に形成することができる唯一の積は，正方行列と 1 列行

---

*）実際，（4－35）式は，（4－36）式の形の直交条件から，直接求めることができる．その証明の簡潔さは，記号的な方法の威力を示すものである．すなわち，（4－36）式に右から $\mathbf{A}^{-1}$ を掛けると，

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.$$

となり，（4－32）式によって，これは

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}$$

となる．

列の積である．しかし，1行行列，すなわちベクトルの転置行列は，実際正方行列に前から掛けることができることに注意しよう．しかしながら，ベクトルに対しては，1列行列とその転置行列を区別することは，しばしばなんの重要性もない．それゆえ，記号 $\mathbf{x}$ はその位置によってどちらであるかわかるから，1列あるいは1行行列のいずれを表わすのにも用いられる*. 例えば，$\mathbf{Ax}$ という表現においては，$\mathbf{A}$ は正方行列として，記号 $\mathbf{x}$ は1列行列を表わすが，一方，$\mathbf{xA}$という表現では，それは，同じ要素を1行に並べた1行行列を表わす．$\mathbf{Ax}$ の第 i 成分は，

$$A_{ij}x_j = x_j(\tilde{\mathbf{A}})_{ji},$$

と書くことができることに注意しなければならない．ここで，われわれは，ベクトルと正方行列の積の，有用な交換性についての次の法則を得る．

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{x}\tilde{\mathbf{A}}.$$

その転置行列と等しい正方行列，すなわち，

$$A_{ij} = A_{ji},$$

である行列は，（明らかな理由によって）**対称**（*symmetric*）であるといわれる．転置行列が，元の行列の符号を変えたものに等しいとき，すなわち，

$$A_{ij} = -A_{ji},$$

であるとき，その行列は**反対称**（*antisymmetric*），あるいは**歪対称**（*skew symmetric*）であるといわれる．反対称行列では，その対角要素は常に零であることは明らかである．任意の正方行列$\mathbf{A}$に対して，

$$\mathbf{A}_s = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}}),$$

で定義される行列 $\mathbf{A}_s$ は対称であり，また，対応する反対称行列 $\mathbf{A}_a$ は，

$$\mathbf{A}_a = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}),$$

---

*) ベクトル行列の上の転置記号は，1列行列と1行行列の区別を強調したいときには，時によって残されることもあるであろう．

で定義される．明らかに，

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a,$$

および，

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_s - \mathbf{A}_a,$$

が導かれる．

p. 142
転置行列の概念に関連して，その複素共役行列は，物理学者には**随伴行列**（*adjoint matrix*）として知られており，ダガー（dagger）† で示される．すなわち，

$$\mathbf{A}^{\dagger} = (\tilde{\mathbf{A}})^{*}, \qquad (4-38)$$

である．ここに * は，普通のように，複素共役を表わす．直交行列に対する（4－36）式の定義と同じように，**ユニタリー行列**（*unitary matrix*）$\mathbf{A}$ は，次の条件，

$$\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{1}, \qquad (4-39)$$

を満足するものとして定義される．剛体の方位を指定する問題では，変換の行列は実でなければならない．それは $\mathbf{x}$ も $\mathbf{x}'$ も実だからである．その場合には，直交性とユニタリー性，あるいは，転置行列と随伴行列の間の区別はない．要するに，実の直交行列はユニタリーである．しかし，まもなくこの章で，そしてさらに後には相対性理論に関連して，複素行列を導入する機会があるであろう．その場合には，上に述べた区別は重要になる．転置行列の性質の多くのものは，随伴行列にも明らかに類似したものがある．しかしながら，ベクトル行列の随伴行列は，元のベクトルと同等ではない．それは複素共役をとる効果があり得るからである．随伴行列と元の行列が同じものであるとき，その行列は**自己随伴**（*self-adjoint*）あるいは**エルミート型**（*hermitean*）であると呼ばれる*.

---

*）読者は"随伴行列"という用語が，数学の文献の多くでは全く違った意味に使われていることに注意しなければならない．それはむしろ行列の逆と関係がある．それゆえ，数学者は，しばしば，"複素共役転置行列"というような，ぎこちない表現と戦わなくてはならない．ここで用いられた，随伴とか自己随伴の意味は，量子力学での使用を通して，物理学の中に定着するようになった．

1つの演算子を，ベクトル，あるいは座標系の変換として二様に解釈する仕方は，座標を変えたときの演算子の変換を見出そうとする場合には，いつでも関係をもってくる．$\mathbf{A}$を，1つのベクトル$\mathbf{F}$（あるいは1列行列$\mathbf{F}$）に作用して，他のベクトル$\mathbf{G}$を作る演算子と考え，

$$\mathbf{G} = \mathbf{AF}$$

としよう．もし，座標系を行列$\mathbf{B}$によって変換すれば，新しい系におけるベクトル$\mathbf{G}$の成分は，

$$\mathbf{BG} = \mathbf{BAF}$$

で与えられる．これはまた，

$$\mathbf{BG} = \mathbf{BAB}^{-1}\mathbf{BF} \qquad (4-40)$$

と書くこともできる．(4－40)式は，演算子 $\mathbf{BAB}^{-1}$が，新しい座標で表わされたベクトル$\mathbf{F}$に作用すると，同じように新しい座標で表わされたベクトル$\mathbf{G}$を生じる，ということを述べているものと解釈することができる．したがって，$\mathbf{BAB}^{-1}$は，演算子$\mathbf{A}$が，新しい座標系へ変換されたときにとる形であると考えることができる．すなわち，

$$\mathbf{A}' = \mathbf{BAB}^{-1}, \qquad (4-41)$$

p. 143
である．(4－41)式の形をもつ行列の変換は，**相似変換**(*similarity transformation*)として知られている．

ここで，正方行列の要素からつくられる行列式(determinant)の性質を考察しておくのがよいであろう．普通行われるように，そのような行列式を，縦の線をつけて$|\mathbf{A}|$で表わそう．行列の掛け算の定義は，行列式の掛け算の定義と，まったく同じであることに気がつくであろう(Bôcher, *Introduction to Higher Algebra*, p. 26参照)．したがって，

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|,$$

である．単位行列の行列式は1であるから，直交条件(4－36)式は，行列式の形では，

$$|\tilde{\mathbf{A}}|\cdot|\mathbf{A}| = 1,$$

と書くことができる．さらに，行列式の値は，行と列を入れ換えても変わらないから，

$$|\mathbf{A}|^2 = 1, \qquad (4-42)$$

と書くことができる．これは，直交行列の行列式が，＋1か−1でしかあり得ないことを意味する（この2つの値の幾何学的意味については，次節で論じられるであろう）．

直交行列でない場合には，行列式はもちろんこのような簡単な値はもたない．しかし，行列式の値は相似変換によって変わらないことは，次のようにして証明することができる．変換された行列に対する（4−41）式に，右から $\mathbf{B}$ を掛けると，

$$\mathbf{A}'\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A},$$

あるいは，行列式の形で書くと，

$$|\mathbf{A}'|\cdot|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}|\cdot|\mathbf{A}|,$$

の関係が得られる．$\mathbf{B}$ の行列式は単なる数であり，しかも零ではないから，* この両辺を $|\mathbf{B}|$ で割ることができて，求める結果，

$$|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|,$$

が得られる．

後に，剛体の運動を論じるときには，これら行列変換，とくに直交行列のすべての性質が用いられる．この他に，他の性質も必要であるが，それらは，必要に応じて導き出すことにしよう．

*) もしそれが零であれば，逆演算子 $\mathbf{B}^{-1}$ があり得ないことになる（Cramer の公式による）．$\mathbf{B}^{-1}$ は（4−41）式が意味をもつために必要である．

4−4　Eulerの角

すでに注意したように（172ページ参照），9個の要素 a_{ij} は独立ではないから，p.144一般化座標としては適当ではない．（4−9）式あるいは（4−15）式の直交条件を表わす6個の関係式は，もちろん，独立な要素の数を3つにまで減らす．しかし，剛体の運動を特徴づけるためには，直交条件で課せられる以外に，行列要素が満たさなければならない，付加的な条件がある．前節では，実の直交行列の行列式は，＋1または−1の値をもち得るだけであるということが指摘された．しかし，以下の議論から，行列式が−1である直交行列は，剛体の物理的な変位を表わすことはできないことが示される．

行列式が−1である簡単な行列を考えよう．それは，

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1},$$

である．変換**S**は，成分のおのおのの符号，あるいは座標軸の向きを変える効果をもっている（図4−6参照）．そのような操作は右手座標系を，左手座標系へ変換するものであって，**反転**（*inversion* あるいは *reflection*）として知られている．

この操作の性質から，右手系から左手系への反転は，座標軸の方向のどんな剛体的な変化によっても達成されないことは明らかである．それゆえ，反転は，

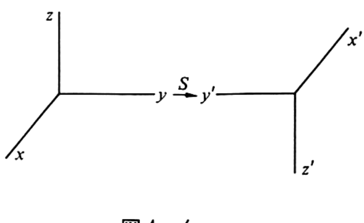


図4−6
座標軸の反転．

剛体の物理的変位には，決して対応しない．**S**に対して真であることは，その行列式が－1である任意の行列に対しても同じように成立する．と言うのは，そのような行列は，その行列式が＋1である行列と，**S**との積として書き表すことができ，したがって，反転の操作を含んでいるからである．したがって，そのような行列は剛体の方位の変化を記述することはできない．それゆえ，剛体の運動を表わす変換は，行列式＋1をもつ行列に制限されなければならない．この結論に達するもう1つの方法は，その変換の行列が，行列式＋1をもつ単位行列から連続的に生成されなければならない，という事実から出発する．行列の行列式が，ある与えられた時刻に，初期値＋1から－1に突然変わるということは，運動の連続性とは相容れないことである．行列式＋1をもつ直交変換は，**固有**(*proper*)といわれ，ごく自然なことであるが，行列式－1をもつものは**非固有**(*improper*)であるといわれる．

力学のラグランジアン形式を用いて剛体の運動を記述するためには，それゆえ，剛体の方位を指定する3つの独立なパラメーターを探し，それらを用いて表わ
p.145 したとき，対応する直交変換の行列が行列式＋1をもつようにしなければならない．そのような一般化座標が見つかったときにはじめて，系に対するラグランジアンを書くことができ，Lagrangeの運動方程式を求めることができる．文献には，そのようなパラメーターの組がいくつも述べられているが，最も普通に用いられ，しかも有用なのは**Eulerの角**(*Euler angles*)である[*]．それゆえ，ここで，これらの角を定義し，直交変換の行列要素が，これらの角を用いて，どのように表わされるかを示しておこう．

与えられた直交座標系から，他の系への変換は，特定の順序で引き続いて3回，回転を行うことによってなし遂げられる．Euler の角は，その場合，3個の相続く回転角として定義される．この回転角の選択にはある程度まで任意性がある．ここで述べる主な規約は，天体力学，応用力学で広く用いられており，また分子物理学および固体物理学でしばしば用いられているものである．他の規約については，以下で述べる．

---

*) また，Euler's anglesとか，Eulerian angles　という書き方もある．

ここで用いられる回転の順序は，最初の座標軸 xyz を，z 軸のまわりに，反時計まわりに角 ϕ だけ回転することから始まる．この結果得られる座標軸を，$\xi\eta\zeta$ 軸と名付けよう．第2の段階では，中間の軸 $\xi\eta\zeta$ が，ξ 軸のまわりに，反時計まわりに角 θ だけ回転され，別の中間軸 $\xi'\eta'\zeta'$ 軸ができる．ξ'軸は，xy平面と，$\xi'\eta'$ 平面の交線であって，節線（*line of nodes*）として知られている．最後に，$\xi'\eta'\zeta'$ 軸を ζ'軸のまわりに反時計まわりに ψだけ回転すると求めている $x'y'z'$ 軸ができる．図4－7は，この回転のいろいろな段階を示している．こういうわけで，Eulerの角 θ, ϕ および ψは，xyz系に対する，$x'y'z'$ 系の方位を完全に指定し，したがって，3個の，必要な一般化座標の役割を果すことができる†．

全体の変換 **A** の要素は，その行列を，それぞれが比較的簡単な行列の形をもっている，個々の回転の3重の積として書き表わすことによって得られる．すなわち，z 軸のまわりの最初の回転は，1つの行列 **D** を用いて，次のように記述することができる．

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{D}\mathbf{x}.$$

ここで $\boldsymbol{\xi}$ と $\mathbf{x}$ は1列行列を表わす．同じように，$\xi\eta\zeta$ から $\xi'\eta'\zeta'$ への変換は，行列 **C** を用いて，

$$\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{C}\boldsymbol{\xi},$$

で，また $x'y'z'$ への最後の回転は行列 **B** を用いて，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}\boldsymbol{\xi}',$$

p. 146
で記述することができる．したがって全体の変換，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

---

†）この規約の範囲でも，古い文献の中には多くの細かい差異が見出される．その違いは，そんなに大きいものではないが，それらはしばしば，行列要素のような最終公式を簡単には比較できなくする程である．多分，最大の混乱は，時によって左手系を用いることから生じている（Osgood によって，またMargenau およびMurphy によってなされているように）．いく人かのヨーロッパの著者は，ここに与えられた仕方に，ϕ と ψ の意味を交換することを除いては，同意している．

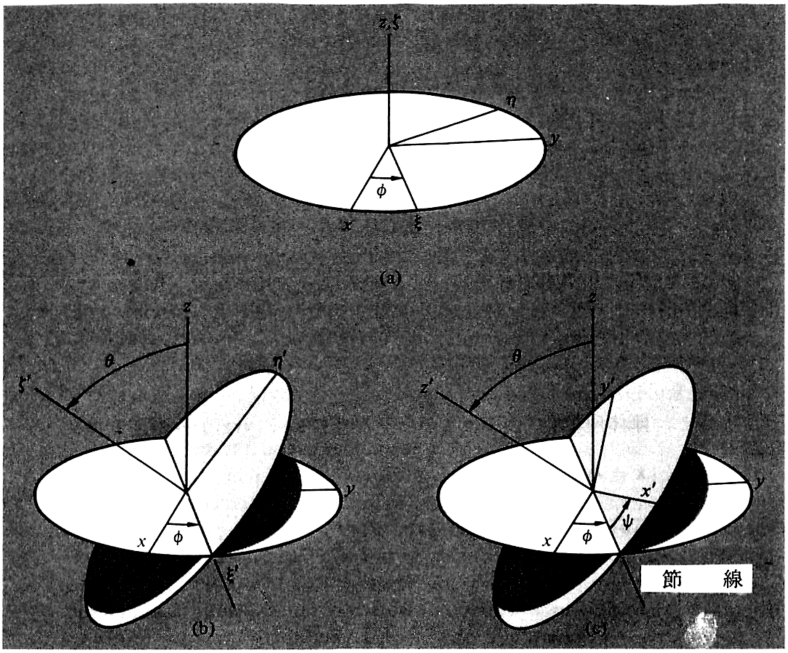


図4－7
Eulerの角を定義する回転．

の行列**A**は，引き続いて行われる変換の積であって，

$$\mathbf{A} = \mathbf{BCD},$$

で与えられる．ところで，**D**という変換は，z軸のまわりの回転であるから，その行列は，次のような形をしている（（4－17）式参照）．

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4-43)$$

Cの変換は，ξ軸のまわりの回転に相当し，その行列は，

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad (4-44)$$

である．最後に**B**は，ζ'軸のまわりの回転であるから，**D**と同じ形をしている．すなわち，

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{4-45}$$

である．したがって，その積行列 $\mathbf{A}=\mathbf{BCD}$ は次のようになる．

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\phi-\cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta\\ -\sin\psi\cos\phi-\cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{4-46}$$

そうすると，剛体座標軸（$x'\,y'\,z'$）から空間座標軸（ xyz ）への逆変換，

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}',$$

は直ちに転置行列$\tilde{\mathbf{A}}$によって与えられ，次のようになる．

$$\mathbf{A}^{-1}=\tilde{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\phi-\cos\theta\sin\phi\sin\psi & -\sin\psi\cos\phi-\cos\theta\sin\phi\cos\psi & \sin\theta\sin\phi\\ \cos\psi\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\sin\psi & -\sin\psi\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\cos\psi & -\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{4-47}$$

上に述べた行列の掛け算，および行列**A**が固有直交行列であることの証明は，演習問題として残しておこう．

座標系の，最後の方位を定義するために用いられる一連の回転は，ある範囲で任意であることに注意しよう．最初の回転は，３つの直交軸のうちのどれのまわりに行ってもよい．それに続く２つの回転に対しては，どの２つの相続く回転も同じ軸のまわりの回転であってはならない，という制限があるだけである．それゆえ，（右手座標系における）Eulerの角を定義するには全部で12の規約がありうる．もっとも頻繁に用いられる２つの規約は，第２の回転の軸の選び方がちがっているだけである．上で述べられ，本書を通じて用いられる，Eulerの角の定義では，第２の回転は中間的なx軸のまわりの回転である．この選び方を，われわれはx-規約と呼ぶことにする．量子力学，核物理学，および素粒子物理学では，第２の角を定義する回転を，中間的なy軸のまわりにとる習慣

が起こってきている[*]．この形は y-規約として示される．

第3の規約は，航空機や人工衛星のような運動中の輸送手段の方位に関係する，工学的な応用で普通に用いられるものである．x-および y-規約は，プライムのついた座標系とつかない座標系とが僅かしか違っていないときに，ϕ と ψ の区別がつかなくなるという欠点をもっている．それは，それぞれの回転軸 z と z' が殆ど一致するからである．この問題を回避するために，3つのすべての回転は異った3つの軸のまわりに行われる．第1の回転は，鉛直軸のまわりのものであって**ヘッディング**(*heading*)あるいは**偏揺れの角**(*yaw* angle)と呼ばれる．第2の回転は，機体に固定され，対称軸に垂直でかつ，第1の軸に直
p. 148 角な軸のまわりのものである．それは，**ピッチ**(*pitch*)(縦揺れ)あるいは**上下角**(*attitude* angle)で測られる．最後に，第3の角は，機体の対称軸のまわりのものであって，**ロール**(*roll*)あるいは**傾きの角**(*bank* angle)である．この回転では3つの軸がすべて異なっているので，これは，xyz-規約と呼ばれる(選ばれる軸の順序は，実際には異なっていることもあるけれども)．この最後の規約は，時にはTait-Bryanの角と呼ばれることもある．

本書では専ら x-規約のみが用いられるが，参考のために，付録Bには，y-および xyz-規約における，Eulerの角を含む公式，例えば，回転行列等がすべて挙げてある．

4−5　Cayley-Kleinのパラメーターとそれに関係した量

剛体の方位を定めるためには，独立な3個の量だけでよいことを見てきた．それにもかかわらず，たとえ一般化座標としては適さないとしても，回転を記述する最少の数よりも多くの変数の組を用いることが望ましいことがある．こういうわけで，Felix Kleinは，複雑なジャイロスコープの(gyroscopic)問題にでてくる積分を容易にするために，彼の名前で呼ばれる4つのパラメーターの組を導入した．Eulerの角を用いたときは，多くの三角関数を含んでいる

---

*) これについては，Wignerの *Group Theory and Its Applications to Quantum Mechanics of Atomic Spectra*，およびRoseの *Elementary Theory of Angular Momentum* の中で用いられたことが決定的だったように思われる．

ために数値計算は困難であるが，4-パラメーターの組による表示は，コンピュータで用いるのにはるかに適している．さらに，4-パラメーターの組は，回転あるいは回転対称性が含まれる問題では，いつでも，本書の範囲を越えて，物理学の他の分野でも大きな理論的な興味がある．それゆえ，いくらかのスペースを，これらの拡張されたパラメーターを記述するために当てることは価値のあることである．しかしながら，この節のどの結果も次の章の剛体運動の議論では，直接には用いられないであろう．

前のいくつかの節では，直交変換の性質を説明するために，場合によっては x_1，x_2 軸をもつ2次元の実空間を利用したが，今度は u および v で表わされる複素軸をもった，それとは違う2次元の空間を考えよう．そのような空間における一般的な1次変換は，

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u + \beta v, \\ v' &= \gamma u + \delta v, \end{aligned} \tag{4-48}$$

で表わされる．これに対応する変換の行列は，

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{4-49}$$

である．これが示すように，$\mathbf{Q}$ は8つの量によって指定される．それは，4つの要素がそれぞれ複素数だからである．変換を3つの独立な量に帰着させるためには，$\mathbf{Q}$ に付加的な条件が課されなければならない．これから後の議論では，多くの場合，$\mathbf{Q}$ がユニタリーであるような変換であると制限しておけば十分である．

$$\mathbf{Q}^\dagger \mathbf{Q} = \mathbf{1} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\dagger. \tag{4-50}$$

p. 149
ユニタリーの条件は，また $\mathbf{Q}$ の行列式の大きさは1でなければならないことを意味する．すなわち，

$$|\mathbf{Q}|^* |\mathbf{Q}| = 1. \tag{4-51}$$

(4-50)式は，展開した形では，

$$\alpha\alpha^* + \gamma\gamma^* = 1,$$

$$\beta\beta^* + \delta\delta^* = 1, \qquad (4-52)$$
$$\alpha^*\beta + \gamma^*\delta = 0,$$

の形の方程式として書くことができる．(4－52)式の最初の2つは実であるが，最後のものは複素であって，それらは全部で4つの条件を形づくっている．**Q**が3つの独立な量だけを含むためには，行列式がちょうど＋1であるということを要求することによってもう1つの付加条件が課せられなければならない．すなわち，

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad (4-53)$$

でなければならない．(4－53)式は複素であるから，それは2つの条件を含むと考えられるかも知れない．しかし，(4－50)あるいは(4－52)式で表わされた，ユニタリー性は，すでに行列式の大きさを定めており，(4－53)式は偏角を定めるのに役立つだけである．このように，(4－53)式によって課せられる条件のうち1つだけが，すでに課せられているユニタリー性の要求と独立である．行列式＋1をもつ行列は，**ユニモジュラー**（*unimodular*）であるといわれる*．2次元複素空間におけるユニタリーでユニモジュラーな変換行列は，それゆえ3つの独立な量のみを含み，この数は剛体の方位を指定するのに必要な数と同じである．

独立なパラメーターに引き直す仕方のうちのあるものは，大した困難なしに行うことができる．(4－52)式の最後のものから，

$$\delta = -\alpha^*\frac{\beta}{\gamma^*}, \qquad (4-54)$$

と書くことができる．これを行列式に対する条件(4－53)式に代入すると，

$$-\frac{\beta}{\gamma^*}(\alpha\alpha^* + \gamma\gamma^*) = 1,$$

が得られる．(4－52)の最初の式によって，括弧の中の量は1であるから，

*) この言い方は普遍的なものではない（文字通りの意味とも全く矛盾しないわけではない）．しかし広く使われているようである．

$$\beta = -\gamma^*, \tag{4-55}$$

となる．そうすると，(4－54)式から，

$$\delta = \alpha^*, \tag{4-56}$$

p.150
が得られる．この4個の条件((4－55)，(4－56)の両式)の結果として，行列**Q**はまた，

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \tag{4-57}$$

と書くこともできる．これに対して，残っている1つの条件((4－52)式の最初の2つ，あるいは(4－53)式から導かれるもの)は，

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1, \tag{4-58}$$

である．しかしこの行列は，むしろ(4－49)式の形のままで残しておく方が都合がよい場合が多い．

さて，**Q**を2次元複素空間におけるユニタリー行列としてのみ考えよう．**P**をこの空間における次のような特別な形をもつ行列演算子としよう．

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}. \tag{4-59}$$

この x, y, z は，数学的には単に3個の実数量であると考えることができるが，物理的には，後に3次元空間における点の座標であると解釈されるであろう．**P**行列が，**Q**行列によって，次のように変換されるものと考えよう．

$$\mathbf{P}' = \mathbf{QPQ}^\dagger, \tag{4-60}$$

Qのユニタリー性から，その随判行列$\mathbf{Q}^\dagger$は逆行列$\mathbf{Q}^{-1}$と同じであるから，(4－60)式は単に，uv空間がユニタリー変換**Q**を受けたときの，**P**の相似変換を表わしているに過ぎない．**P**はエルミート行列であることに注意しよう．さらに，行列の**トレース**(*trace*)あるいは跡(*spur*)として知られている**P**の対角要素の和は，この場合には零である．ところで，行列のエルミート性も，そのトレースも，共に相似変換に対して不変である，ことを証明することができる(この章の終りの演習問題を参照せよ)．したがって**P**′もやはり自己随伴

的であり，そのトレースは零でなければならない．このことは，$\mathbf{P}'$が，

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}, \qquad (4-61)$$

の形をしているときに限っていえることである．ただし，x', y', z'は実数の量である．$\mathbf{P}$の行列式もまた，相似変換(4－60)に対して不変である．したがって，次の等式が成立する．

$$|\mathbf{P}| = -(x^2 + y^2 + z^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2) = |\mathbf{P}'|.$$

この式は，直交条件を表わしていることがわかる．それは，ベクトル$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$の長さが変換によって変わらないことを要求しているからである．それゆえ，2次元の複素空間におけるユニタリー行列$\mathbf{Q}$のおのおのに対して，普通の3次元空間における，実の直交変換が結びつけられている．

この結びつきの本質については，次のような考察によって，ある程度の見通しが得られる．座標$\mathbf{x}$を$\mathbf{x}'$に変換する実の直交行列を$\mathbf{B}$で示し，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x},$$

p.151
とし，これに結びつけられるユニタリー行列を$\mathbf{Q}_1$で表わして，

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}_1\mathbf{P}\mathbf{Q}_1^{\dagger},$$

としよう．さらに$\mathbf{x}'$から$\mathbf{x}''$への第2の直交変換は，行列$\mathbf{A}$によって行われるものとし，

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}',$$

これに結びつけられる行列$\mathbf{Q}_2$として，

$$\mathbf{P}'' = \mathbf{Q}_2\mathbf{P}'\mathbf{Q}_2^{\dagger},$$

であるとする．さて$\mathbf{x}$から$\mathbf{x}''$への直接の変換は，

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B},$$

によって定義される行列$\mathbf{C}$で実現される．これに対応して，$\mathbf{P}$から$\mathbf{P}''$への直接の変換は，ある行列$\mathbf{Q}_3$による相似変換によってなし遂げられる．したがってこの行列$\mathbf{Q}_3$は$\mathbf{C}$と結びつけられなければならない．しかし$\mathbf{P}$から$\mathbf{P}''$への変換

はまた，次の式から得ることもできる．

$$\mathbf{P}'' = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{P}\mathbf{Q}_1^{\dagger}\mathbf{Q}_2^{\dagger}.$$

ここで，

$$\mathbf{Q}_1^{\dagger}\mathbf{Q}_2^{\dagger} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{\dagger},$$

であることは，容易に証明できる．そうすると，２つのユニタリー行列の積は，またユニタリーになるから，$\mathbf{Q}_3$は積 $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$ と同じであると考えなければならない，という結果がでてくる．すなわち，

$$\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1,$$

である．したがって２×２の複素ユニタリー行列と，３×３の実直交行列の間の対応では，一方の組の行列の間の任意の関係が，他方の組の，これに対応する行列によって満足されるようになっている．この２組の行列は，**準同型**(*homomorphic*)であるといわれる．$\mathbf{Q}$行列を直交変換と結びつけることについての議論は，今までの所，$\mathbf{Q}$行列のユニタリー性のみを用いてきた．ユニタリーな２×２複素行列は，４個の独立な量をもっているから，同じ直交変換に対応して，多くの可能な$\mathbf{Q}$行列が存在することは明らかである．$\mathbf{Q}$の行列式が＋１であるという付加的な要求は，等価な$\mathbf{Q}$行列の多重性を，後に見るように，行列の対にまで減少させる．さらに，ユニモジュラー性の要求は，行列式＋１をもつ直交変換との結びつきに制限することを見出すであろう．

このような対応関係にある２つの型の行列のもう１つ別の記述を与えるために，特に近年になって，群論の数学の“隠語”(jargon)がしばしば用いられるようになってきた．実固有直交行列とユニモジュラー行列は，両方共“群の性質”(group property)をもっていることは容易に示される(演習問題参照)．

p. 152

３×３実固有直交行列の群は $O^+(3)$ と記され，“プラス”の上つき添字は行列式の符号を表わしている*．２×２複素・ユニタリー・ユニモジュラー行列の群は，それに対応して，SU(2)(特殊ユニタリー)と表わされる．このように，われ

*) $O^+(3)$のかわりに，SO(3)という記号もよく用いられる．Sは特殊(special)を表わす．

われが上で導き出した対応は，$O^+(3)$ 群と SU(2) 群の間のものである．

直交行列の要素は，準同型な**Q**の行列要素で書き表わすことができる．(4−55)と(4 − 56)式から，**Q**の随伴行列は，

$$\mathbf{Q}^{\dagger} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

である．計算を簡単にするために，次のように定義される省略記号 x_+ および x_- を採用しよう．

$$x_+ = x + iy$$
$$x_- = x - iy.$$

そうすると，変換された行列 **P**′ は次のように書ける．

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

あるいは，示された計算を行うと，

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} (\alpha\delta + \beta\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+ & -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ & -(\alpha\delta + \beta\gamma)z + \alpha\gamma x_- - \beta\delta x_+ \end{pmatrix}, \quad (4-62)$$

となる．行列要素を等しいとおくことによって，プライムのついた座標系と，つかない座標系との間の変換式は，

$$\begin{aligned} x'_+ &= 2\gamma\delta z \quad - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ \\ x'_- &= -2\alpha\beta z \quad + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ z' &= (\alpha\delta + \beta\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+, \end{aligned} \quad (4-63)$$

の形に書くことができる．最後に，行列要素 a_{ij} は(4 − 63)式を普通の変換式(4 − 14)と比べることによって，α, β, γ および δ を用いて求めることができる．すなわち，(4 − 63)の最後の式は，

$$z' = (\beta\delta - \alpha\gamma)x + i(\alpha\gamma + \beta\delta)y + (\alpha\delta + \beta\gamma)z,$$

と書くことができ，これから直ちに次の結果が得られる．

$$a_{31} = (\beta\delta - \alpha\gamma), \quad a_{32} = i(\alpha\gamma + \beta\delta), \quad a_{33} = \alpha\delta + \beta\gamma.$$

p. 153
このような手続きによって，変換行列の全体は，次の形をしていることが容易

にわかる．

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2-\gamma^2+\delta^2-\beta^2) & \frac{i}{2}(\gamma^2-\alpha^2+\delta^2-\beta^2) & \gamma\delta-\alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2+\gamma^2+\beta^2+\delta^2) & -i(\alpha\beta+\gamma\delta) \\ \beta\delta-\alpha\gamma & i(\alpha\gamma+\beta\delta) & \alpha\delta+\beta\gamma \end{pmatrix}. \quad (4-64)$$

（4－64）式は，剛体の方位を指定する行列を与えるものであって，α, β, γ および δ なる量によって完全に表わされる．このようにして，これら4個の量は，Euler の角と同じように，剛体の方位を定める1つの方法を与える．これらの量は普通**Cayley-Kleinのパラメーター**として知られている*．もちろん，4個の複素量は，関係式（4－55），（4－56）および行列式の条件（4－58）式で結びつけられている．（4－64）式の中の **A** の行列要素が実であることは，α と β をそれらの実部と虚部で陽に書くことによって，（4－55），（4－56）式を用いて直接示すことができる．

$$\begin{aligned} \alpha &= e_0 + ie_3, \\ \beta &= e_2 + ie_1. \end{aligned} \quad (4-65)$$

（見掛け上の奇妙な記号の選び方の理由は後に明らかになるであろう．216ページ参照）．これら4個の実の量を用いれば，行列式の条件（4－58）式はつぎのようになる．

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (4-66)$$

そうすると，ちょっと代数的演算をすれば，（4－64）式で与えられるような行列 **A** は，4個の実のパラメーターを用いて，次の形に書くことができることが示される．

---

*) （4－64）式の行列 **A** は，これに対応する行列として，例えば Whittaker の書物の12ページに与えられる形とは一致していない．そのわけは，根本的には，行列 **P** の最初の選び方が違っているということにある．行列式が $-r^2$ になるような行列を組み立てる仕方が，いくつもあることは明らかであって，その特定のものを選ぶのは，慣習上の問題である．ここで用いた（4－59）式の形は，量子力学で普通用いられるものと一致するように選んだ．

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} e_0^2+e_1^2-e_2^2-e_3^2 & 2(e_1e_2+e_0e_3) & 2(e_1e_3-e_0e_2) \\ 2(e_1e_2-e_0e_3) & e_0^2-e_1^2+e_2^2-e_3^2 & 2(e_2e_3+e_0e_1) \\ 2(e_1e_3+e_0e_2) & 2(e_2e_3-e_0e_1) & e_0^2-e_1^2-e_2^2+e_3^2 \end{pmatrix}. \quad (4-67)$$

こう書けば，行列要素が実であることは明白である[†]. これらのパラメーターで書いた行列**A**は，反転変換**S**の形には直すことはできないことは容易に示される．非対角要素とその転置は，少なくともパラメーターのうちの３個が零になるときに限り，全部が零になることを示している．そうすると，残りの零でないパラメーターを，３個全部の対角要素（あるいはそれらのうちの１個だけ）が－1になるように選ぶことはできない．それゆえ，（4－64），または（4－67）式による**A**の表現は．座標の反転，あるいは事実任意の非固有直交変換も記述することはできない．

p. 154

Cayley-Kleinのパラメーターは，対応するEulerの角で表わすことができる．必要ならば，（4－64）式の行列要素を，ϕ, θ および ψ で表わした行列要素と直接比べることによってこれを行うことができる．しかしそれよりも，まず最初に，Euler の角を定義するときに引き続いて行われる，１つ１つの回転に対応する**Q**行列をつくり，次にこれを結合して全体の行列をつくる方が，もっと手続きが簡単で，また教育的でもある．すなわち，角 ϕ は z 軸のまわりの回転によって定義されたが，この変換を x_+, x_- および z で表わすと，

$$x'_+ = e^{-i\phi}x_+$$
$$x'_- = e^{i\phi}x_-$$
$$z' = z,$$

となる．この式を（4－63）式と比べてみると，明らかに，この簡単な回転に対しては，行列**Q**の要素は次の形をしていなければならない．

$$\gamma=\beta=0, \qquad \alpha^2=e^{i\phi}, \qquad \delta^2=e^{-i\phi}.$$

すなわち，

---

†）４個の実のパラメーター e_0, e_1, e_2, e_3（あるいはそれらを少し変形したもの）は，時にはまた文献の中で，Cayley-Kleinのパラメーターと呼ばれることがある．しかし，歴史上の事実からすれば，それらを**Euler のパラメーター**と呼ぶ方がより正しい．

$$\mathbf{Q}_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \qquad (4-68)$$

である．この行列要素は，自動的に（４－55），（４－56）および（４－58）式の条件を満足していることがわかるであろう．

次の回転は（x-規約では），新しい x 軸のまわりに，**反時計まわり**に角 θ だけ行われる．そして，たがいに対応する行列要素を等しいとおくことは，同じようなやり方で進めることができるが，計算は幾分長たらしくなる．ここではただ，対応する $\mathbf{Q}$ 行列が，

$$\mathbf{Q}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad (4-69)$$

であることだけを述べておこう．これを検証するためには，直接次の式を確かめればよい．

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z\cos\theta - y\sin\theta & x - i(y\cos\theta + z\sin\theta) \\ x + i(y\cos\theta + z\sin\theta) & -z\cos\theta + y\sin\theta \end{pmatrix}.$$

p.155
これから，求める変換，

$$x' = x$$
$$y' = y\cos\theta + z\sin\theta$$
$$z' = -y\sin\theta + z\cos\theta,$$

が導かれる．

ψ を定義する最後の回転は，再び z 軸のまわりの回転であるから，

$$\mathbf{Q}_\psi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}, \qquad (4-70)$$

である．第４－４節では，全体の変換に対する直交行列が，各々３つの回転

に対する別々の行列の積として得られた．3×3の実直交行列が，**Q**行列と準同型であることから，その当然の結果として，全体の変換に対する**Q**もまた，同じように3つの回転行列 $\mathbf{Q}_\psi$, $\mathbf{Q}_\theta$, $\mathbf{Q}_\phi$ の積によって与えられる．すなわち，

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix},$$

あるいは，

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} e^{i(\psi+\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2} & ie^{i(\psi-\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ ie^{-i(\psi-\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi+\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad (4-71)$$

である．したがってCayley-Kleinのパラメーターを，Eulerの角で表わすと，

$$\alpha = e^{i(\psi+\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad \beta = ie^{i(\psi-\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2},$$
$$\gamma = ie^{-i(\psi-\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \delta = e^{-i(\psi+\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad (4-72)$$

となる．これで求めている結果が完全に得られた．4個の実Eulerパラメーターに対するEulerの角による表現は，(4－72)式によって直ちに与えられる．

$$e_0 = \cos\frac{\phi+\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad e_2 = \sin\frac{\phi-\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2},$$
$$e_1 = \cos\frac{\phi-\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad e_3 = \sin\frac{\phi+\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}. \qquad (4-72')$$

付録Bには，他の規約による，Cayley-KleinおよびEulerのパラメーターをEulerの角で表わす公式が挙げてある．

p. 156
P行列は，トレース零をもつ3個の行列の和として次のように書けることに注意しよう．

$$\mathbf{P} = x\boldsymbol{\sigma}_1 + y\boldsymbol{\sigma}_2 + z\boldsymbol{\sigma}_3. \qquad (4-73)$$

ここで，$\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2$ および $\boldsymbol{\sigma}_3$ はいわゆる**Pauli のスピン行列**と呼ばれ，

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

で与えられる．これら3個の行列は，1つのベクトルの成分を形成すると便宜的に考えることができる*．それゆえ，(4−73)式は記号的には簡潔に，

$$\mathbf{P} = \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{4−73′}$$

と書くことができる．これら3個の行列は，単位行列，

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

と合わせて，4個の独立な行列の組をつくる．したがって，4個の独立な量を含む任意の2×2行列は，これらの1次結合として表わすことができる．このように，Euler のパラメーターで表わすと，**Q**行列は，

$$\mathbf{Q} = e_0\mathbf{1} + i(e_1\boldsymbol{\sigma}_1 + e_2\boldsymbol{\sigma}_2 + e_3\boldsymbol{\sigma}_3), \tag{4−74}$$

の形に書くことができ，これはパラメーターの記号の選び方を説明し始める形になっている†．座標軸のまわりの回転に対する**Q**行列は，$\boldsymbol{\sigma}$を用いると，特に簡単な形に表わすことができる．例えば，x軸のまわりの回転に対応する$\mathbf{Q}_\theta$，(4−69)式は，次のように書くことができる．

$$\mathbf{Q}_\theta = \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\boldsymbol{\sigma}_1\sin\frac{\theta}{2}. \tag{4−75}$$

同じように，z軸のまわりの回転に対応する$\mathbf{Q}_\phi$行列は，

$$\mathbf{Q}_\phi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\phi}{2} - i\sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{1}\cos\frac{\phi}{2} + i\boldsymbol{\sigma}_3\sin\frac{\phi}{2}, \tag{4−76}$$

---

*) 記法は便宜上のものである．なぜなら，個々の行列は配置空間におけるベクトルの成分として変換されるわけではないからである．事実，それらは，すべての直交空間座標系で同じ表現をもたなければならない．そうでなければ(4−73)式は成立しない．

†) いくらか古臭い数学を知っている人は，(4−74)式の中に，**Q**の行列4元数(matrix *quaternion*)としての表現を認めるであろう．これはSir William R. Hamilton によって1843年に考え出された量である．ここでe_0は(4元数の)スカラーであり，括弧の中の量は，4元数のベクトルである．

p.157
の形をしている．またy軸のまわりの回転は，（4－76）式の中で$\boldsymbol{\sigma}_3$を$\boldsymbol{\sigma}_2$で置き換えたのと同じ行列の形をもつことを，直接確かめることができる．このように，基本的な回転の行列はすべて，単位行列と，各回転に対応する$\boldsymbol{\sigma}$行列のみを含む同じような式で与えられる．したがって，Pauliのスピン行列は，それぞれある特別な軸のまわりの回転に結びつけられるものであって，その軸に関する**単位回転子**（*unit rotator*）と考えることができる．

Pauliのスピン行列の掛け算についての性質を利用して，（4－75）式で与えられる基本的な回転行列$\mathbf{Q}_\theta$は，また記号的に，

$$\mathbf{Q}_\theta = e^{i\boldsymbol{\sigma}_1(\theta/2)}, \tag{4－77}$$

の形に書くことができることを示すことができる（演習問題13参照）．行列の指数関数は，第1項が単位行列$\mathbf{1}$であるような，指数関数の級数表現に対する略記である．これと関連して，もし$\mathbf{B}$がエルミート行列であるならば，

$$\mathbf{A} = e^{i\mathbf{B}}$$

はユニタリーであることを注意しておこう（演習問題12参照）．Pauliのスピン行列は明白にエルミート行列であるから，$\mathbf{Q}$行列に対するユニタリー条件は明らかに満足されている．

Cayley-Kleinのパラメーター，およびこれらのパラメーターを含む行列に特徴的なことは，至る所に半角が現われることであって，この特徴のために，uv空間がある特別な性質をもつようになる．例えば，普通の3次元空間では，z軸のまわりに角2πだけ回転すると，単に最初の座標系が再現されるだけである．すなわち，前節の$\mathbf{D}$行列において$\phi=2\pi$とおくと，$\cos\phi=1$，$\sin\phi=0$となって，$\mathbf{D}$はちょうど，恒等変換に対応する単位行列$\mathbf{1}$になる．他方（4－68）式の$\mathbf{Q}_\phi$に同じ値を代入すると，

$$\mathbf{Q}_{2\pi} = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が得られるが，これは$-\mathbf{1}$であって$\mathbf{1}$ではない．しかし，それと同時に，2×2行列の$\mathbf{1}$もまた，3次元の恒等変換に対応しなければならない．したがって3×3の単位行列に対応して，$\mathbf{1}$と$-\mathbf{1}$の2個の行列$\mathbf{Q}$があることになる．一般

に，もし行列$\mathbf{Q}$が，ある実の直交行列に対応するならば，$-\mathbf{Q}$もまた同じ行列に対応する．こういうわけで2つの行列の集合の間の準同型は，この場合には，ただ1つの3×3行列と行列の対 $(\mathbf{Q}, -\mathbf{Q})$ の間の1対1対応，すなわち**同型**（*isomorphism*）を意味しており，個々の行列の対応ではない．この意味で，$\mathbf{Q}$行列は，対応する3次元直交行列の**2価**（*double-valued*）関数であるということができる．

このような逆説的に見える事態が起こっても，われわれの常識を混乱させることはない．uv空間は，ここで紹介したように，単にある一定の型の3×3行列と2×2行列の間に，1つの対応をつけるために工夫された数学的な構成物であるにすぎない．そのような空間が，物理的な3次元空間と同じ性質をもつことは，誰も要求しないし，また期待もしないであろう．数学者は，uv 空間の
p.158 性質についてかなりの注意を払い，この空間における2次元の複素ベクトルを**スピノール**（*spinor*）と名付けた．量子力学では，スピノール空間は，物理的実在にもう少し近づいてくることがわかる．なぜなら，電子の“スピン”の影響を含ませるためには，波動関数あるいはその1部をスピノールにしなければならないからである．実際，半角と，その結果として生ずる2価性は，スピンが半整数であるという事実と密接な関係がある*．この問題をさらに追求することは，明らかに古典力学の範囲を越えることになるであろう．

4−6　剛体の運動に関するEulerの定理

前節までの議論で，剛体の運動を記述するための数学的な方法が完全に得られた．剛体の方位は，どの瞬間においても1つの直交変換によって明確に指定される．この変換の行列要素は，適当なパラメーターの組で表わすことができる．時間がたつと，剛体の方位は刻々変わって行くから，変換の行列は時間の関数

---

*）波動関数は回転に対して2価ではあるが，すべての物理的に観測可能な性質は，もちろん，1価のままである．完全な2回転，すなわち角4πの回転は，$\mathbf{Q}^2_{2\pi}$に対応し，これは常に単位行列$+\mathbf{1}$である．Diracは，完全に2回ねじって作ったくみひもはほどくことができるが，1回だけねじったものはほどくことができない！，という位相幾何学的な奇妙さとの対応を指摘している（M. Gardner, *New Mathematical Diversions from Scientific American*（St. Louis, Missouri: Fireside, 1971）の第2章および*Scientific American*, Dec. 1959, p. 166を見よ）.

となり，$\mathbf{A}(t)$と書くことができる．時刻 $t=0$ において剛体に固定された軸（これから後，剛体軸という）が空間に固定された軸（これから後，空間軸という）と一致するように選ぶと，この変換は最初は単に恒等変換になり，

$$\mathbf{A}(0)=\mathbf{1},$$

である．後の時刻には，$\mathbf{A}(t)$は一般には恒等変換と異なるけれども，物理的な運動は連続的でなければならないから，$\mathbf{A}(t)$は時間の連続関数でなければならない．このように，変換$\mathbf{A}(t)$は，**恒等変換から連続的に展開されて**行くということができる．

剛体の運動を記述するこの方法と，すでに導入した数学的な道具だけを用いて，ここで剛体の運動の重要な特性を明らかにすることができる．基本的に重要なのは，次の定理である．

Euler の定理：1点が固定された剛体の一般的な変位は，ある軸のまわりの回転である．

固定点を，剛体系の原点にとれば，剛体の変位に剛体軸の並進が伴なうことはない．変わるのはその方位だけである．そうすると，上の定理の述べていることは，任意の時刻 t における剛体軸が，常に最初の軸（空間軸と一致するようにとってある）から，ただ1回の回転によって得られる，ということである．言い換えれば，剛体の物理的な運動を記述する行列$\mathbf{A}$の意味する操作は，**回転**
p.159
である．ところで，回転の特徴は，1つの方向すなわち回転の軸が，その操作によって影響を受けないということである．したがって，回転軸の方向にある任意のベクトルは，最初と最後のいずれの軸に関しても，同じ成分を持たなければならない．ベクトルの大きさが変わらないという，回転に対するいま1つの必要条件は，直交条件によって自動的に与えられる．したがって，両座標系で同じ成分をもつベクトル$\mathbf{R}$が存在することを示せば，Euler の定理が証明されたことになる．ベクトルに対する行列記号を用いると，

$$\mathbf{R}'=\mathbf{A}\mathbf{R}=\mathbf{R}, \qquad (4-78)$$

が成立すればよい．（4－78）式は，もっと一般的な方程式，

$$\mathbf{R}' = \mathbf{AR} = \lambda\mathbf{R} \qquad (4-79)$$

の特別な場合になる．ここでλは定数で，複素数であってもよい．(4－79)式が解をもつようなλの値は，行列の**固有値**(*characteristic value*あるいは*eigenvalue**)として知られている．従って，方程式(4－79)を満足するベクトル**R**を求める問題は，与えられた行列**A**に対する**固有値問題**(*eigenvalue problem*)と呼ばれ，(4－79)式自身は**固有値方程式**(*eigenvalue equation*)と呼ばれる．これに対応して，その解ベクトルは**Aの固有ベクトル**(*eigenvectors*)である．ここで，Euler の定理は次のように言い換えることができる．

1点が固定された剛体の物理的な運動を指定する実の直交行列は，常に固有値＋1をもつ．

固有値方程式(4－79)は，

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{R} = 0, \qquad (4-80)$$

あるいは，展開した形で，

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)X + a_{12}Y + a_{13}Z &= 0,\\ a_{21}X + (a_{22}-\lambda)Y + a_{23}Z &= 0,\\ a_{31}X + a_{32}Y + (a_{33}-\lambda)Z &= 0,\end{aligned} \qquad (4-81)$$

と書くことができる．(4－81)式は，固有ベクトルの成分 X, Y, Z に対する3個の同次連立方程式である．このような方程式は，3個の成分に対して定まった値を与えることはできず，ただそれら3個の成分の比を与えることができるだけである．これは，物理的には固有ベクトルの**方向**だけは定めることができるが，その大きさは決められないという事情に対応する．固有ベクトルと定数の積はやはり固有ベクトルである．いずれにしても，(4－81)式は同次であるから，すべてが零でない解をもつことができるのは，その係数のつくる行列式が零になるとき，すなわち，

*) この用語は，字義通りにいえば“proper value”を意味する，ドイツ語の*eigenwerte*からきたものである．

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0, \qquad (4-82)$$

p.160
が成立するときに限る．(4－82)式は，行列**A**の**特性方程式**(*characteristic* equation)または**永年方程式**(*secular* equation)として知られているものであって，この方程式を満足するλの値が求める固有値である．そうすると，Eulerの定理は，これまで考察してきた実の直交行列に対して，その永年方程式が$\lambda=+1$という根をもたなければならないということを述べていることになる．

一般に，永年方程式(4－82)は3個の根をもち，これらに対応して3個の固有ベクトルがある．議論を進めて行く上での便宜のために，しばしばX, Y, ZのかわりにX_1, X_2, X_3の記号が用いられる．そのような記号を用いるときには，固有ベクトルの成分はX_{ik}で示される．1番目の添字は特定の成分を示し，2番目の添字は3個の固有ベクトルのどれに対応するかを表わす．(4－81)の1組の方程式の代表的な1つを，このような記号で書くと(和の記号を陽に書いて)，

$$\sum_j a_{ij}X_{jk}=\lambda_k X_{ik},$$

あるいは，

$$\sum_j a_{ij}X_{jk}=\sum_j X_{ij}\delta_{jk}\lambda_k, \qquad (4-83)$$

となる．そうすると，(4－83)式の両辺は，いずれも行列の積の要素の形をしている．左辺は**A**と，要素X_{jk}をもつ行列**X**との積，右辺は，**X**と，jk-要素が$\delta_{jk}\lambda_k$である行列との積の要素である．この最後の行列は対角型であって，その対角要素は**A**の固有値である．したがってこの行列を$\boldsymbol{\lambda}$で示すことにしよう．

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \qquad (4-84)$$

こういうわけで，(4－83)式は，行列方程式

$$\mathbf{AX} = \mathbf{X}\lambda,$$

あるいは，左から$\mathbf{X}^{-1}$を掛けて，

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} = \lambda, \tag{4-85}$$

と同じことになる．ところで，この左辺は，$\mathbf{A}$に相似変換を施した形になっている（これを（4－41）式の形に変えるには，$\mathbf{X}^{-1}$を$\mathbf{Y}$という記号で表わしさえすればよい）．こういうわけで，（4－85）式は，固有値問題を研究するための別な方法を与える．すなわち相似変換で$\mathbf{A}$を対角型にするという方法である．相似変換を行うために用いられる行列の各列は，固有ベクトルの成分から成っている．$\mathbf{A}$の対角化された形での要素は，対応する固有値である．

Eulerの定理は，$\tilde{\mathbf{A}}$の直交性を用いることによって，直接に証明することができる．次の表現，

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1})\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{1} - \tilde{\mathbf{A}},$$

p.161
を考えよう．両辺を形成する行列の行列式をとると（186ページ参照），等式，

$$|\mathbf{A} - \mathbf{1}|\,|\tilde{\mathbf{A}}| = |\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{A}}|, \tag{4-86}$$

を書くことができる．剛体の運動を記述するためには，行列$\mathbf{A}(t)$は固有回転に対応しなければならない．それゆえ，$\mathbf{A}$とその転置行列の行列式は$+1$でなければならない．さらに，一般にある行列の転置行列の行列式は，元の行列の行列式に等しいから，（4－86）式において転置の記号は取り去ってよい．

$$|\mathbf{A} - \mathbf{1}| = |\mathbf{1} - \mathbf{A}|. \tag{4-87}$$

（4－87）式は，ある特別な行列の行列式はその行列に負号をつけた行列の行列式に等しいことを述べている．$\mathbf{B}$をある$n \times n$行列としよう．そのとき，行列式のよく知られた性質によって，

$$|-\mathbf{B}| = (-1)^n |\mathbf{B}|$$

である．われわれは3次元空間$(n = 3)$で考えているから，（4－87）式は，任意の固有回転に対して，

$$|\mathbf{A}-\mathbf{1}|=0, \qquad (4-88)$$

であるときに限り成立することができることは明らかである．(4－88)式を，永年方程式(4－82)と比較すると，方程式(4－82) を満足する固有値の 1 つは常に $\lambda=+1$ でなければならないことがわかる．これはEulerの定理の望んでいた結果である．

Euler の定理の証明が，考えている空間の次元数の重要性をいかに強調しているかということに注意しよう．偶数の次元をもつ空間では，(4－87) 式はすべての行列について恒等式となり，Euler の定理は成立しない．このように，2 次元に対しては，その**空間の中**には，回転によって変らずに残るベクトルは存在しない．回転の軸は，平面に垂直であり，したがって，その空間の外にある．

ここまでくれば，3 次元における他の固有値の性質を決定するのは簡単なことである．+1 という固有値を λ_3 で示そう．任意の行列の行列式は，相似変換によって影響を受けない(187ページを見よ)．したがって(4－84)と(4－85) の両式によって，そしてまた固有回転としての $\mathbf{A}$ の性質から，

$$|\mathbf{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\lambda_1\lambda_2=1, \qquad (4-89)$$

である．さらに，$\mathbf{A}$ は実行列であるから，もし λ が永年方程式(4－82)の 1 つの解であるならば，その複素共役 λ^* もまた 1 つの解でなければならない．

もし，与えられた固有値 λ_i が複素数であるならば，そのとき，(4－79)式を満足する対応する固有ベクトル $\mathbf{R}_i$ もまた一般に複素ベクトルであるだろう．以前には，(実) 直交変換の下における複素ベクトルの性質は取り扱わなかった．以前の定義にはいくらかの修正を加えなければならない．複素ベクトル $\mathbf{R}$ の長さ，あるいは大きさの 2 乗は $\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^*$，あるいは行列記法では $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^*$ である．ここで左側のベクトルの上の転置記号は，それが 1 行行列によって表わされること
p.162
を示す．実直交変換の下では，大きさの 2 乗は不変量である．

$$\tilde{\mathbf{R}}'\mathbf{R}'^*=(\widetilde{\mathbf{A}\mathbf{R}})\mathbf{A}\mathbf{R}^*=\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{R}^*=\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^*.$$

さて，$\mathbf{R}$ が，1 つの複素固有値 λ に対応する複素固有ベクトルであるとしよう．

そうすると，(4－79)式によって，

$$\tilde{\mathbf{R}}'\mathbf{R}'^{*} = \lambda\lambda^{*}\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{*},$$

となるが，これから，**すべての固有値は大きさ1をもつ**という結論が導かれる．すなわち，

$$\lambda\lambda^{*} = 1. \tag{4-90}$$

これらの性質から，固有値の分布として3つの場合が可能であることが結論されるであろう．もし固有値がすべて実数であるならば，2つの状況だけが可能である．

1. すべての固有値は $+1$ である．その変換行列は $\mathbf{1}$ であって，これをわれわれは自明な場合と呼ぶことにする．
2. 1つの固有値が $+1$ で，他の2つは両方共 -1 である．そのような変換は，2つの軸については反転を行い第3の軸は変えないものとして特徴づけられる．同じことだが，それは不変である軸の方向のまわりの角 π だけの回転である．

もし固有値のすべてが実ではないときには，ただ1つの可能性が付け加えられるだけである．

3. 1つの固有値は $+1$ であり，他の2つは互いに複素共役であって，$e^{i\Phi}$ および $e^{-i\Phi}$ の形をしている．

このように，Euler の定理のより完全な述べ方は，次のようなものである．任意の自明でない実直交行列は，固有値 $+1$ を1つ，**そしてただ1つ**だけ持っている．

そうすると，回転軸の方向余弦は，固有値方程式(4－81)において $\lambda=1$ とおき，これを X, Y, Z について解くことによって得られる*. 回転角も同じよう

*) 永年方程式に多重根があると，これに対応する固有ベクトルはそれ程簡単には見出せない．第5－4節および第6－2節参照．実際，固有値がすべて異なるのでなければ，一般の行列を完全に対角型にすることは，必ずできるとは限らない．しかし，Euler の定理によると，自明でない直交行列のすべてに対して，$+1$ は1重根であるから，これらの例外は当面の考察に対しては重要でない．

に，たやすく求めることができる．すなわち，相似変換によって，行列**A**を，z 軸が回転軸の方向にあるような座標系に変換することはいつでも可能である．そのような座標系では，**A**′は z 軸のまわりの角 Φだけの回転を表わし，したがって，次の形をしている．

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

p.163
A′のトレースは，簡単に，

$$1 + 2\cos\Phi,$$

となる．ところが，トレースは相似変換に対して不変であるから，これはまた，最初の座標系における**A**のトレースの値に等しくなければならない．すなわち

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = a_{ii} = 1 + 2\cos\Phi, \qquad (4-91)$$

である．これによって回転角が行列要素で与えられる．回転角Φは，複素固有値 λ の位相角(phase angle)とも同一視されるべきである．それは，対角型の(4－84)式における**A**のトレースは，固有値の和にちょうど等しいからである．Euler の定理と，固有値の性質によって，この和は，

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = \sum_i \lambda_i = 1 + e^{i\Phi} + e^{-i\Phi} = 1 + 2\cos\Phi,$$

である．固有値がすべて実であるような状況は，実際には**A**が複素数の値をとる場合の特別な場合に当ることがわかる．すべての $\lambda_i = +1$ である場合は，回転角 $\Phi = 0$ の回転 (恒等変換) に対応し，また，2重固有値 -1 をもつ場合は，前に注意したように，$\Phi = \pi$ に対応する．

回転軸の方向と，回転角に対する規定には曖昧さがないわけではない．もし**R**が固有ベクトルであるならば，$-$**R** もそうであって，それゆえ，回転軸の向きは指定されない．さらに，Φが(4－91)式を満足するならば，$-\Phi$ も満足する．事実，固有値方程式の解は，直交変換の行列**A**を一義的に確定しないことは明らかである．行列式の形の永年方程式(4－82)から，逆行列 $\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}$ は**A**と同じ固有値と固有ベクトルをもつことが導かれる．しかしながら，この曖昧さ

は，$\mathbf{A}$に対してΦを，$\mathbf{A}^{-1}$に対して$-\Phi$を割り当て，そして回転軸の向きは，右ねじの規則によって定めることによって改善できる．

最後に，Eulerの定理の直接の系として，次の定理が得られることに注意しておくべきであろう．

Chaslesの定理：剛体の最も一般的な変位は，並進に回転を加えたものである．

この定理を詳しく証明する必要は殆どない．簡単にいえば，1点を固定した運動の拘束を取り除くと，剛体軸の原点に対して3個の並進の自由度が導入されるのである*．

p.164

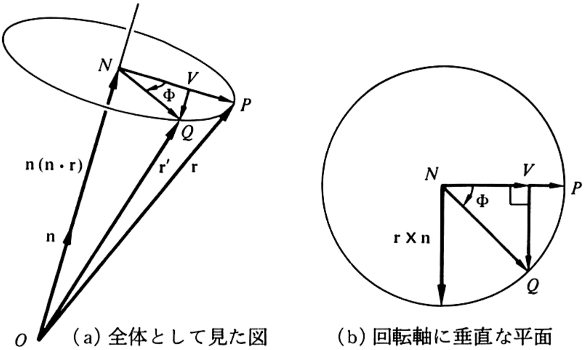
4−7　有限回転

共通の原点をもつ，2つの直交座標系の相対的な方位が，いろいろな表示によって記述された．その中には，一方の座標系を他の座標系へ，相続く3個のEulerの角だけの回転によって変換するものも含まれていた．前節では，その座標変換が，適当な方向のまわりの単一の回転によって行われ得ることが示された．それゆえ，座標変換の，回転のパラメーター——回転角と回転軸の方向余弦——による表現を探すのが自然である．

いくらかの簡単なベクトル代数の助けを借りて，そのような表現を導き出すことができる．その目的のためには，変換を，その能動的な意味で，すなわち，固定された座標系においてベクトルを回転させるような変換として，取り扱うのが便利である（177ページを見よ）．座標系の反時計まわりの回転は，そのときには，ベクトルの**時計まわり**の回転のように見えるということを思い出さなければならない．図4−8(a)には，ベクトル$\mathbf{r}$の最初の位置が$\overrightarrow{OP}$で示され，

---

*) M. Chasles(1793−1881)はまた，定理のもっと強い形を証明した．すなわち，剛体軸の原点を，並進が回転軸と同じ方向であるように選ぶことができることを証明した．そのような，並進と回転との結合は，**らせん運動**(*screw motion*)である．現在では，Chaslesの定理のこの述べ方はほとんど用いられないし，また19世紀に展開されたらせん運動の詳細な数学も余り用いられていない．Routh, *Elementary Dynamics of a Rigid Body*, 5th ed. (London: Macmillan, 1891), pp. 194−198を見よ．



(a) 全体として見た図　　　(b) 回転軸に垂直な平面

図4−8
回転公式を導き出すためのベクトル図.

最後の位置 $\mathbf{r}'$ が $\overrightarrow{OQ}$ で表わされている．また，回転軸の方向の単位ベクトルは $\mathbf{n}$ で示されている．O と N の間の距離は大きさ $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}$ をもつから $\overrightarrow{ON}$ は $\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})$ と書くことができる．図 4−8(b) は，回転軸に垂直な平面へのベクトルの射影である．ベクトル $\overrightarrow{NP}$ はまた，$\mathbf{r}-\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})$ と書くこともできるが，その大きさは，ベクトル $\overrightarrow{NQ}$ および $\mathbf{r}\times\mathbf{n}$ の大きさに等しい．$\mathbf{r}'$ と $\mathbf{r}$ の間の求める関係を得るために，われわれは $\mathbf{r}'$ を次のように3つのベクトルの和として構成する．

$$\mathbf{r}' = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ}.$$

すなわち，

$$\mathbf{r}' = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + [\mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})]\cos\Phi + (\mathbf{r}\times\mathbf{n})\sin\Phi.$$

p.165
項を少し並べ変えると，次のような最後の結果に導かれる．

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\cos\Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})[1-\cos\Phi] + (\mathbf{r}\times\mathbf{n})\sin\Phi. \qquad (4-92)$$

式(4−92)を，**回転公式**(*rotation formula*)と呼ぶことにしよう*.(4−92)

*) 明らかにそれは由緒ある名前をもっていない. Hamel (*Theoretische Mechanik* p. 103)は，それをフランスの数学者O. Rodrigues (1794−1851)に帰しているが，しかしそれはおそらく誤りであろう．多分，Gibbsがベクトルの形に書いた最初の人であろう(*Vector Analysis*, p. 338). しかし元になる公式は，もっとはるかに古い.

式は，どんな回転に対しても成立することは強調しておくべきである．その大きさはいくらでもよい．またこのようにして，(4－92)式は，無限小回転の下でのベクトルの変化に対して75ページで与えられた記述の(時計回りの)有限回転への翻訳である(また222ページを見よ)．

回転公式(4－92)はスカラーe_0と，成分e_1, e_2, e_3をもつベクトル$\mathbf{e}$を導入することによってもっと有用な形に書くことができる．ここに，e_0，$\mathbf{e}$は，

$$e_0 = \cos\frac{\Phi}{2}, \qquad \mathbf{e} = \mathbf{n}\sin\frac{\Phi}{2}, \tag{4-93}$$

で定義される．4個の量は，明らかに，条件，

$$e_0^2 + e^2 = e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1, \tag{4-94}$$

によって関係づけられている．Φの三角関数は，

$$\cos\Phi = 2e_0^2 - 1 = e_0^2 - e^2 = e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2,$$

および，　　　　(4－95)

$$\mathbf{n}\sin\Phi = 2e_0\mathbf{e},$$

のように表わすことができる．これらの結果を用いて，さらに少し計算をすれば，(4－92)式は次のように書き直すことができる．すなわち，

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}(e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) + 2\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}) + 2(\mathbf{r}\times\mathbf{e})e_0. \tag{4-96}$$

(4－96)式は，$\mathbf{r}'$の成分が$\mathbf{r}$の成分の1次関数であることを示している．それは，事実，回転の直交行列**A**に対応する1次変換方程式のベクトル形である．行列要素a_{ij}は，単に各x_i'について(4－96)式を展開し，x_jの係数を集めることによってe_0，$\mathbf{e}$を用いて表わすことができる．例えば，(4－96)式から，x'はx, y, zと次の式によって関係づけられる．

$$x' = x(e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) + 2e_1(e_1x + e_2y + e_3z) + 2(ye_3 - ze_2)e_0.$$

それゆえ，

$$a_{11}=e_0^2+e_1^2-e_2^2-e_3^2,$$
$$a_{12}=2(e_1e_2+e_0e_3),$$
$$a_{13}=2(e_1e_3-e_0e_2),$$

p.166
である．(4－67)式の中の行列の形と比較してみれば，そこで与えた行列要素と完全に一致していることが示される．それゆえ，(4－93)式で定義される e_0，$\mathbf{e}$ は，第4－5節で導入されたEulerのパラメーターと同じものである(そのためにこの記号を選んだ)．このようにして，(4－94)式は行列式の条件(4－66)式と同じものである．

Eulerのパラメーターとのこの一致によって，以前の多くの結果を，回転角と回転軸の方向で表わすことができることになる．このように，e_0 に対する(4－72′)の最初の式は，(4－93)式と結びつけて，直ちに回転角をEulerの角で表わす式を与える．

$$\cos\frac{\Phi}{2}=\cos\frac{\phi+\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}. \qquad (4-97)$$

もちろん，この結果は，わずかな三角関数の演算によって，行列 $\mathbf{A}$ のトレースの式(4－46)から得ることもできる．回転行列 $\mathbf{A}$ に準同型な，2×2ユニモジュラー行列 $\mathbf{Q}$ も，回転のパラメーターで書き換えることができる．それには，

$$\mathbf{Q}=e_0\mathbf{1}+i\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\sigma},$$

の形から出発する．そうすると(4－93)式はまた，

$$\mathbf{Q}=\mathbf{1}\cos\frac{\Phi}{2}+i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\Phi}{2}, \qquad (4-98)$$

のようになる．(4－98)式は，(4－75)式の任意の回転軸への直接的な一般化であって，事実，(4－75)式から，座標の適当な変換によっても得られた筈のものである．同じように，$\mathbf{Q}_\theta$ の指数関数表示，(4－77)式に対応するものは，

$$\mathbf{Q}=e^{i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\Phi/2)}, \qquad (4-99)$$

である．行列の指数関数の意味については同じ定義を用いる．

4−8 無限小回転

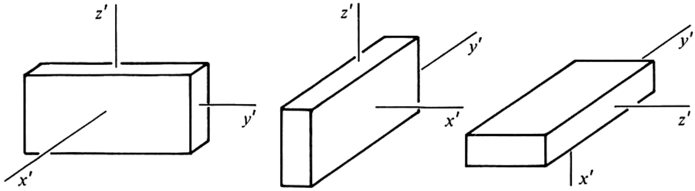
前数節で，剛体の方位の記述に，いろいろな行列が結びつけられた．しかしながら，行列要素の数は常に独立変数の数よりも多く，いろいろな付加条件がつけられなければならなかった．さて，任意の与えられた方位が，ある軸のまわりの単一の回転によって得ることができる，ということが確定されると，固定点のまわりの剛体の有限の変位と，3個の独立な量によって特徴づけられた1つのベクトルとを結びつけたいという誘惑にかられる．確かに1つの方向がおのずから示唆される——それは回転軸の方向である．またその大きさとしては回転角の任意の関数が適当であるように見える．しかしそのような対応がうまく行かないことはすぐ明らかになる．すなわち**A**および**B**を，変換**A**および**B**に結びつけられた，そのような2つの“ベクトル”と仮定しよう．そうすると，それらがベクトルとしての資格をもつためには，加法に関して交換可能でなければならない．すなわち，

p.167

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A},$$

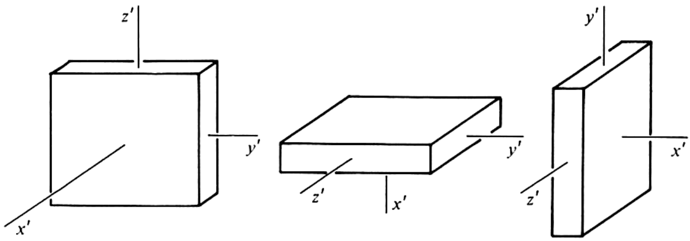
が成立しなければならない．しかし，2つの回転の和，すなわち，1つの回転の次にまた1つの回転を行なうことは，すでに見たように，2つの行列の積**AB**に対応する．ところが，行列の積は一般に可換ではない．すなわち，$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$であるから，**A**，**B**は加法に関しては可換ではない．したがって，これらをベクトルとして受け入れることはできない．有限な回転の和は，回転の順序に関係するというこの結論は，簡単な実験によってはっきり示すことができる．すなわち，図4−9は，最初にブロックをこれに固定したz'軸のまわりに90°だけ回転し，次にy'軸のまわりに90°だけ回転した結果を，順に図に示したものであり，図4−10は同じ回転を逆の順序で行った結果を表わしたものである．最後の位置は2つの場合ではっきり違っている．

このように，有限回転は単一のベクトルでは表わすことができないけれども，**無限小回転**（*infinitesimal rotations*）だけを考えるならば，上に述べたような異論は成り立たない．無限小回転は，ベクトルの成分が新旧2つの座標系で



（a）垂直の位置.　（b） z' 軸のまわりに 90°回転.　（c）中間的な y' 軸のまわりに 90°回転.

図 4－9
与えられた順序で行われる２つの回転の結果を示す.



（a）垂直の位置.　（b） y' 軸のまわりに 90°回転.　（c）中間的な z' 軸のまわりに 90°回転.

図 4－10
図 4－9 に示した２つの回転を逆の順序に行った結果.

ほとんど等しい——変化が無限小である——ような，座標軸の１つの直交変換 p. 168 である．すなわち，あるベクトル $\mathbf{r}$ の x_1' 成分は（変換の受動的な解釈において），実際的には x_1 成分と同じといってよい程で，その差は極めて小さく，

$$x_1' = x_1 + \epsilon_{11}x_1 + \epsilon_{12}x_2 + \epsilon_{13}x_3, \tag{4-100}$$

である．行列要素 $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}$ などは無限小と考えるべきであるから，これから後の計算では，ϵ_{ij} の１次の項で，零にならないものだけを残しておけばよい．任意の成分 x_i' に対して，無限小変換の式は，

$$x_i' = x_i + \epsilon_{ij}x_j,$$

あるいは，

$$x_i' = (\delta_{ij} + \epsilon_{ij})x_j, \tag{4-101}$$

と書くことができる．δ_{ij}なる量は，単位行列の要素であるから，(4－101)式は行列記号で書くと，

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{x}, \tag{4-102}$$

となる．(4－102)式は，無限小変換の行列に対する典型的な形が $\mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}$ であること，すなわち，それは殆ど恒等変換に等しく，それとの違いはせいぜい無限小演算子だけであることを表わすものである．

さて，無限小変換に対しては，演算の順序は重要でないこと，言い換えれば，それらが**交換できる**ことが，次のようにしてわかる．$\mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}_1$および$\mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}_2$を2つの無限小変換とすれば，1つの可能な積は，高次の無限小を無視すると，

$$\begin{aligned}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_1)(\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_2) &= \mathbf{1}^2 + \boldsymbol{\epsilon}_1\mathbf{1} + \mathbf{1}\boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_1\boldsymbol{\epsilon}_2 \\ &= \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2,\end{aligned} \tag{4-103}$$

となる．逆の順序の積は，単に$\boldsymbol{\epsilon}_1$と$\boldsymbol{\epsilon}_2$が交換されるだけである．行列の加法は常に交換可能であるから，この交換は結果に影響を及ぼさない．無限小変換の可換性によって，それをベクトルで表わすことに対する難点は取り除かれる．

無限小変換に対する逆変換は容易に求めることができる．$\mathbf{A}=\mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}$ を変換の行列とすれば，その逆行列は，

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\epsilon}, \tag{4-104}$$

である．その証明としては，積 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$が単位行列になることに注意すればよい．

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{1}.$$

これは逆行列を定義する(4－32)式と一致している．さらに，$\mathbf{A}$の直交性は，p.169
$\tilde{\mathbf{A}} \equiv (\mathbf{1} + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}})$が(4－104)式に与えられている$\mathbf{A}^{-1}$に等しくなければならないことを意味する．それゆえ，無限小行列は反対称である.[*]

---

*) この節では，無限小直交変換が回転に相当することを暗に仮定してきた．ある意味では，この仮定は明白である．"無限小反転"などということは，言葉の上で矛盾している．形式的には，上のようなことは，$\boldsymbol{\epsilon}$の反対称性からいわれるのである．すなわち，この場合には，$\mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}$の対角要素はすべて1であって，変換の行列式は，小さい量に関して1次の項までに止めると，常に1になる．これは回転の特徴である．

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = -\boldsymbol{\epsilon}.$$

反対称行列の対角要素は必ず零であるから，3×3の反対称行列はどれでも，高々3個の異なった要素があり得るだけである．したがって $\boldsymbol{\epsilon}$ を，

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4-105)$$

の形に書いても，一般性は失なわれない．3個の量 $d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3$は，明らかに回転を指定する独立な3個のパラメーターと同じものと考えることができる．さて，これら3つの量はまたある特別な種類のベクトルの成分を形成するということが示されるであろう．(4−102)式によって，座標系の無限小変換の下での，1つのベクトルの成分の変化は，次の行列方程式で表現することができる．

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} \equiv d\mathbf{x} = \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{x}. \qquad (4-106)$$

(4−105)式で与えられる $\boldsymbol{\epsilon}$ を用いてこれを展開すると，

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2\,d\Omega_3 - x_3\,d\Omega_2, \\ dx_2 &= x_3\,d\Omega_1 - x_1\,d\Omega_3, \\ dx_3 &= x_1\,d\Omega_2 - x_2\,d\Omega_1, \end{aligned} \qquad (4-107)$$

となる．(4−107)の各式の右辺は，2つのベクトル，すなわち $\mathbf{r}$ と成分$d\Omega_1$, $d\Omega_2$, $d\Omega_3$である1つのベクトル $d\boldsymbol{\Omega}$ とのベクトル積の成分の形をしている.† それゆえ，われわれは(4−107)式を同等な形に，

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\Omega}, \qquad (4-108)$$

と書くことができる．ベクトル $\mathbf{r}$ は，直交行列 $\mathbf{B}$ の下では次の式に従って変換される((4−20)式参照)．

---

†) $d\boldsymbol{\Omega}$ があるベクトルの微分ではないということは，強調しても強調しすぎることはない．$d\boldsymbol{\Omega}$ という結合は，微分ベクトル，すなわち大きさが微小であるベクトルを表わしている．不幸なことに，記号についての規約は，$\boldsymbol{\Omega}$にのみベクトルの特徴が適用されることになっている．しかし，読者には，$d\boldsymbol{\Omega}$がその微分を表わすようなベクトルは存在しないということは明らかである筈である．すでにわれわれが見た通り，有限回転は単一のベクトルで表わすことはできない．

$$x_i' = b_{ij}x_j. \qquad (4-109)$$

p.170
もし $d\mathbf{\Omega}$ が $\mathbf{r}$ と同じ意味においてベクトルであるべきだとすれば，それは $\mathbf{B}$ の下で同じように変換されなければならない．われわれが見るように，$d\mathbf{\Omega}$ はベクトルとしてのこのテストに大部分はパスするけれども，1つの点でその資格を得ることができない．$d\mathbf{\Omega}$ の変換性を調べる1つの方法は，行列 $\boldsymbol{\epsilon}$ が座標変換の下で，どのように変換されるかを見出すことである．上の第4－3節で示されたように，変換された行列 $\boldsymbol{\epsilon}'$ は，相似変換，

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{B}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{B}^{-1},$$

から得られる．行列の反対称性は，直交相似変換の下で保存される(演習問題3を見よ)から，$\boldsymbol{\epsilon}'$ はまた零でない要素 $d\Omega_i'$ をもつ(4－105)式の形に書くことができる．付録Cに与えられているように，これらの要素を詳しく調べてみると，$\boldsymbol{\epsilon}'$ は相似変換の下で，

$$d\Omega_i' = |\mathbf{B}|\, b_{ij}\, d\Omega_j, \qquad (4-110)$$

のように変換されることが示される．このように，$d\mathbf{\Omega}$ の変換は $\mathbf{r}$ に対する変換と殆ど同じであるが，変換の行列の行列式 $|\mathbf{B}|$ の因子だけ違っている．

しかしながら，$d\mathbf{\Omega}$ のベクトルとしての特性を明らかにし，そして事実その変換性が(4－110)式によって与えられることを証明する，もっと簡単な方法がある．前節では，座標系の有限回転 Φ の下における，$\mathbf{r}$ の成分の変化に対するベクトル公式が導かれた．Φ を無限小角 $d\Phi$ に近づけることによって，無限小回転に対する公式を得ることができる．この極限では(4－92)式の中の $\cos\Phi$ は1に近づき，$\sin\Phi$ は Φ に近づく．そうすると $\mathbf{r}$ の無限小変化に対する結果の表式は，

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} \equiv d\mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{n}\, d\Phi, \qquad (4-111)$$

となる．これは，(4－108)式と比べると，$d\mathbf{\Omega}$ が実際に1つのベクトルであって，

$$d\mathbf{\Omega} = \mathbf{n}\, d\Phi, \qquad (4-112)$$

によって定められることを示している．（4－111）式は，もちろん，有限回転の公式に頼らなくても直接導き出すことができる．能動的な意味で考えると，無限小座標変換は，ベクトル $\mathbf{r}$ を，回転軸のまわりに角 $d\Phi$ だけ**時計まわり**に回転させることに対応する．この様子は図4－11に示されている*．$d\mathbf{r}$ の大きさは，$d\Phi$ について1次の項までとって，図から，

$$dr = r\sin\theta\, d\Phi,$$

であって，この極限では，$d\mathbf{r}$ の方向は $\mathbf{r}$ と $d\mathbf{\Omega} = \mathbf{n}\, d\Phi$ の両方に垂直である．最後に，$d\mathbf{r}$ の向きは，$\mathbf{r}$ を $d\mathbf{\Omega}$ に重ねるようにまわすとき，右ねじの進む向きである．このように，図4－11は，（4－111）式によって予言されたのと同じ，$d\mathbf{r}$ の大きさ，方向，および向きを示している．

p. 171
（4－112）式によって定義される $d\mathbf{\Omega}$ の変換性は，もう少し議論しておくべきである．初等ベクトル代数**から良く知られているように，反転の下におけ

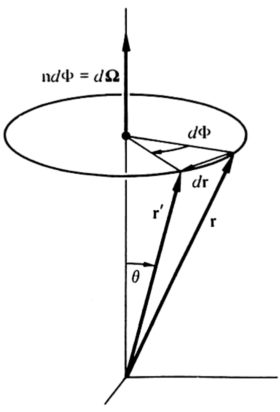


図4－11
ベクトルの，時計まわりの無限小回転によって生ずるベクトルの変化．

*）図4－11は，図2－8を時計まわりの回転にしたものである．

**）例えば，J. B. Marion, *Principles of Vector Analysis*, pp. 42－49.

る変換性に関して，ベクトルには２種類のものがある．（４－109）式に従って変換されるベクトルは，**極性ベクトル**（*polar vector*）として知られている．３次元の反転，$S_{ij}=-\delta_{ij}$.の下では，極性ベクトルのすべての成分は符号を変える．他方，**軸性ベクトル**（*axial vector*）あるいは**擬ベクトル**（*pseudovector*）の成分は，反転によって符号を変えない．軸性ベクトルの最も簡単な例は，２つの極性ベクトルのベクトル積である．

$$\mathbf{C}=\mathbf{D}\times\mathbf{F}.$$

ここで，ベクトル積の成分は，普通，次の定義によって与えられる．

$$C_i=D_jF_k-F_jD_k \qquad i,j,k \text{ はサイクリックな順序にとる．} \tag{4-113}$$

Dと**F**の成分は反転によって符号を変えるから，**C**の成分は符号を変えない．多くの物理的な量，例えば角運動量，$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$，や磁場の強さは，軸性ベクトルの親しみ深い例である．軸性ベクトルに対する変換法則は，（４－110）式の形をしている．固有直交変換に対しては，軸性ベクトルと極性ベクトルは区別できない．しかし非固有直交変換，すなわち反転を含む直交変換では$|\mathbf{B}|=-1$であって，２つの型のベクトルは異なる振舞いをする†．

変換の受動的な解釈によれば，なぜ極性ベクトルが反転の下でそのように振舞うかを知ることは容易である．ベクトルは変換によって影響を受けないままにとどまり，そのかわり，座標軸，したがって成分が符号を変える．そのとき，軸性ベクトルに対して違うのは何か？ 軸性ベクトルには，常に，例えば，（４－113）式の定義によって，ベクトル積に含まれているような，“手の向き”（handedness）の規約が伴っている．反転の下では，右手系から左手系に変わり，そして，（４－113）式の中のサイクリックな順序という要求も，右ねじの規約から左ねじの規約に変えられることを意味する．それゆえ，受動的な解釈においてさえも，反転によるベクトル積の方向の実際の変化が存在する．

p. 172

---

†）擬ベクトルと極性ベクトルとの内積は**擬スカラー**（*pseudoscalar*）と呼ばれる．真のスカラーは，直交変換の下では完全に不変であるが，擬スカラーは非固有回転によって符号を変える．

ここまでくれば，なぜ $d\mathbf{\Omega}$ が（4－110）式に従って，軸性ベクトルとして変換されるかが明らかになる．代数的には，（4－111）式におけるベクトル $\mathbf{r}$ と $d\mathbf{r}$ は両方共極性ベクトルであるから，$\mathbf{n}$，したがって $d\mathbf{\Omega}$ は軸性ベクトルでなければならないことがわかる．幾何学的には，座標の反転は，$\mathbf{n}$ の方向を定義するのに，右ねじの法則から左ねじの法則に切り替えることに対応している．

ベクトル積の議論は，将来最も有用になるであろう記法を導入する機会を与える．**順列記号**(*permutation symbol*)あるいは *Levi-Civita* 密度*(*density*) ϵ_{ijk} は，添字 ijk のどれか2つが等しければ零であり，そうでなければ ijk が，1, 2, 3 の偶順列か奇順列かに従って＋1または－1である．こうすると，順列記号を用いれば，ベクトル積の成分に対する（4－113）式は，

$$C_i = \epsilon_{ijk}D_jF_k, \qquad (4-113')$$

と書くことができる（ここでは通常の和の規約が使われている）．さらに，Euler のパラメーターを用いて表わされた回転公式，（4－96）式は，次のように書き直すことができる．

$$x_i' = x_i(e_0^2 - e_ke_k) + 2e_ie_jx_j + 2\epsilon_{ijk}e_0x_je_k. \qquad (4-114)$$

ここに，繰り返し現われる添字に対しては，1, 2, 3 の値にわたって和がとられる．変換 $\mathbf{A}$ の直交行列の要素は，（4－114）式の x_j の係数を眺めることによって，直ちに Euler のパラメーターを用いて表わすことができる．

$$a_{ij} = \delta_{ij}(e_0^2 - e_ke_k) + 2e_ie_j + 2\epsilon_{ijk}e_0e_k. \qquad (4-115)$$

ちょっと書き下してみれば，このまとまった公式は，実際に，（4－67）式の中のすべて行列要素を記述していることが示される．

この章で今まで述べてきた回転の記述は，剛体の方位を表現するという目的のために展開されてきた．変換はまず座標系の回転を含むものであったことを強調しておこう．それゆえ，対応する固定座標系におけるベクトルの回転という“能動的な”解釈は，反対向き，すなわち時計まわりの回転を意味する．

*）あるいはまた，階数3の**交代テンソル**(*alternating tensor*)あるいは **等方テンソル**(*isotropic tensor*)としても知られている．

しかしそれらの事柄に対しては，力学あるいは物理学一般の多くの分野があって，そこではわれわれは，物理系およびそれらに結びついたベクトルの回転の効果に関わりを持つことになる．回転の下での系の不変性と，角運動量の保存則との結びつきについては，すでに指摘した（第2－6節）．そのような応用では，ベクトルの回転の結果を，普通の反時計まわりの意味で考えることが必要 p.173 である．参考のために，上で与えられた多くの回転公式を，ここで表にしておこう．ただしこれらは，ベクトルの反時計まわりの回転に対するものである．ここからこの節の終りまでの，すべての方程式や命題は，そのような反時計まわりの回転に対してのみ適用される．

（4－92）式の回転公式は，

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\cos\Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})[1-\cos\Phi] + (\mathbf{n}\times\mathbf{r})\sin\Phi, \qquad (4-92')$$

になり，また対応する無限小回転に対する（4－111）式は，

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} = (\mathbf{n}\times\mathbf{r})\,d\Phi, \qquad (4-111')$$

の形になる．さらに，それに結びついた2×2複素行列$\mathbf{Q}$は，

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1}\cos\frac{\Phi}{2} - i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\Phi}{2}, \qquad (4-98')$$

の形をとり，対応する指数関数表示は，

$$\mathbf{Q} = e^{-i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\Phi/2)}, \qquad (4-99')$$

となる．無限小回転の反対称行列，（4－105）式は，

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} d\Phi, \qquad (4-105')$$

になるが，ここで n_i は回転軸に沿う単位ベクトルの成分である．$d\mathbf{x}$ が無限小変化 $\mathbf{x}'-\mathbf{x}$ を表わすものとすると，（4－102）式は，回転角に関する1つの行列微分方程式の形をとる．すなわち，

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\Phi} = -\mathbf{N}\mathbf{x}, \qquad (4-116)$$

である．ここに$\mathbf{N}$は，$N_{ij}=\epsilon_{ijk}n_k$の要素をもつ，（4－105′）式の右辺にでてくる行列である．

他の有用な表現は，（4－105′）式の中の$\boldsymbol{\epsilon}$を

$$\boldsymbol{\epsilon}=n_i\mathbf{M}_i\,d\Phi,$$

と書くことによって得られる．ここに$\mathbf{M}_i$は次の3個の行列である．

$$\mathbf{M}_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{M}_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{M}_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.\qquad(4-117)$$

行列$\mathbf{M}_i$は，**無限小回転生成子**（*infinitesimal rotation generators*）として知られ，それらの積は次のような興味ある性質をもっている．

$$\mathbf{M}_i\mathbf{M}_j-\mathbf{M}_j\mathbf{M}_i\equiv[\mathbf{M}_i,\mathbf{M}_j]=\epsilon_{ijk}\mathbf{M}_k.\qquad(4-118)$$

2個の行列の積の差，あるいは**交換子**（*commutator*）はまた，$\mathbf{M}_i$の**Lie括弧式**（*Lie bracket*）とも呼ばれ，（4－118）式は，回転角をパラメーターとした回転群の**Lie代数**（*Lie algebra*）を定義するものである．p. 174 回転の群論にこれ以上深入りすることは，余りにも遠くへ行きすぎることになるであろう．しかし，われわれは，後に回転の演算のこれらの性質を参照する機会があるであろう．

4－9　ベクトルの変化率

無限小回転の概念は，剛体の運動を時間的に記述するための有力な手段を与える．剛体内の1点の位置ベクトルとか，あるいはその全角運動量のように，力学の問題に含まれている任意のベクトル$\mathbf{G}$を考えよう．そのようなベクトルは，普通，剛体が運動するにつれて時間と共に変わるけれども，その変化は，観測の基準にとる座標系に関係することがしばしばある．例えば，もしそのベクトルが，剛体に固定された座標系の原点から剛体内の1点に至る動径ベクトルであるならば，明らかにそのようなベクトルは，剛体系で測った場合には一定であるように見える．しかし，そのベクトル成分は，空間系に静止している観測者が，自分の座標系を基準にして測ったとき，剛体が運動していれば，時間的に

変化するであろう．

一般のベクトル$\mathbf{G}$の成分の，時間 dt の間の変化を剛体軸から測ったものは，同じ変化を空間軸から測ったものとは異なっているであろう．$\mathbf{G}$の２つの微分的変化の間の関係は，物理的な議論に基づいて導き出すことができる．これら２つの間の違いは，剛体軸の回転の効果だけであることを次のように書くことができる．

$$(d\mathbf{G})_{\rm space} = (d\mathbf{G})_{\rm body} + (d\mathbf{G})_{\rm rot}.$$

さて，剛体に固定された１つのベクトルを考えよう．剛体が回転するとき，剛体に固定された観測者から見た，すなわち剛体軸に相対的なこのベクトルの成分は，もちろん変化しない．$(d\mathbf{G})_{\rm space}$ への唯一の寄与は，そのときには，剛体の回転の効果である．しかし，そのベクトルは，剛体系に固定されているから，それは剛体系とともに**反時計まわり**に回転し，空間から見たそのベクトルの変化は，（４－111）式によって与えられるものである．それゆえ，$(d\mathbf{G})_{\rm rot}$ は，

$$(d\mathbf{G})_{\rm rot} = d\mathbf{\Omega} \times \mathbf{G},$$

によって与えられる．任意のベクトルに対して，空間軸に相対的な変化は，２つの効果の和である．

$$(d\mathbf{G})_{\rm space} = (d\mathbf{G})_{\rm body} + d\mathbf{\Omega} \times \mathbf{G}. \qquad (4-119)$$

２人の観測者によって見られたときのベクトル$\mathbf{G}$の時間的な**変化率**（*rate of change*）は，（４－119）式を，考えている微小な時間要素 dt で割ることによって得られる．

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\rm space} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\rm body} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}. \qquad (4-120)$$

p.175
ここで，$\boldsymbol{\omega}$ は剛体の瞬間的な**角速度**（*angular velocity*）であって，次の関係式* によって定義される．

---

*）$\boldsymbol{\omega}$ は何かあるベクトルの導関数ではないから，それは，時に，積分可能でない微分的拘束にならって，非ホロノミック・ベクトルと記されることがある．

$$\boldsymbol{\omega}\, dt = d\boldsymbol{\Omega}. \qquad (4-121)$$

ベクトル$\boldsymbol{\omega}$の方向は，t と $t+dt$ の間に起こる無限小回転の軸の方向にあり，その方向は**瞬間回転軸**（*instantaneous axis of rotation*）として知られている．$\boldsymbol{\omega}$の大きさは，剛体の瞬間的な回転率を測るものである．

基本的な方程式（4－120）のもっと形式的な導出は，空間軸と剛体軸の間の変換の直交行列を用いるものである．i 番目の空間軸の方向の$\mathbf{G}$の成分は，剛体軸の方向の成分と次の関係にある．すなわち，

$$G_i = \tilde{a}_{ij} G'_j = a_{ji} G'_j,$$

である．剛体が時間と共に動くときには，変換行列の要素 a_{ij} と共に成分 G'_j も変わるであろう．それゆえ，微小な時間要素 dt の間の G_i の変化は，

$$dG_i = a_{ji}\, dG'_j + da_{ji} G'_j, \qquad (4-122)$$

で与えられる．時刻 t において，空間軸と剛体軸が瞬間的に一致していると考えても一般性は失なわれない．そのときには，成分は２つの系で瞬間的には同じであるだろうが，その微分は同じでは**ない**であろう．それは２つの系がお互いに相対的に運動しているからである．このように，$G'_j = G_j$ であるが，$a_{ji}\, dG'_j = dG'_i$ である．プライムは，微分が剛体系で測られるものであることを強調するためにつけてある．時間 dt の間の行列$\mathbf{A}$の変化は，このように，単位行列からの変化であり，それゆえ，無限小回転の行列$\boldsymbol{\epsilon}$に対応している．したがって，

$$da_{ji} = (\tilde{\boldsymbol{\epsilon}})_{ij} = -(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}})_{ij},$$

となる．ここで$\boldsymbol{\epsilon}$の反対称性を用いた．順列記号 $\boldsymbol{\epsilon}_{ijk}$ を用いれば，$\boldsymbol{\epsilon}$ の要素は，次のようになる（（4－105）式参照）．

$$-\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ijk}\, d\Omega_k = \epsilon_{ikj}\, d\Omega_k.$$

（4－122）式は，

$$dG_i = dG'_i + \epsilon_{ikj}\, d\Omega_k G_j,$$

と書くことができる．右辺の最後の項は，ベクトル積の第 i 成分の表式であることが認められるであろう．それゆえ，２つの系における微分の間の最終的な

表式は,

$$dG_i = dG'_i + (d\mathbf{\Omega} \times \mathbf{G})_i, \qquad (4-123)$$

となって,これは(4−119)式の第i成分と同じである.(4−119)式は,特定のベクトル$\mathbf{G}$に関する式であるというよりはむしろ,2つの座標系の間の時間に関する導関数の変換についての命題であると言った方がよい.$\mathbf{G}$が任意であるということがその導出で用いられたが,そのことは,(4−120)式をある与えられたベクトルに作用する演算子方程式として書くことによって強調される.

p.176

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times. \qquad (4-124)$$

ここで,添字sとrは,時間に関する導関数が,それぞれ空間軸および(回転する)剛体軸の系で観測されるものであることを示している.得られたベクトル方程式は,もちろん,固定された,あるいは動いている,任意の望ましい系の軸の方向に分解することができる.しかし,時間的な変化率は,指定された座標系に相対的なものであるにすぎないということは,再び強調されなければならない.1つのベクトルの時間に関する導関数が1つの座標系に関するものであるときには,微分が実行された後になって初めて,他の座標軸に沿う成分をとることができる.

角速度ベクトルを,Euler の角と,時間に関するその導関数で表わすと便利なことがしばしばある.$\boldsymbol{\omega}$に結びついている一般的な無限小回転は,角速度$\omega_\phi = \dot{\phi}, \omega_\theta = \dot{\theta}$ および $\omega_\psi = \dot{\psi}$をもった3つの引続いて行われる無限小回転から成ると考えることができる.無限小回転が,ベクトルの性質を持っているために,ベクトル$\boldsymbol{\omega}$は3つの別々の角速度ベクトルの和として得ることができる.あいにく,$\boldsymbol{\omega}_\phi, \boldsymbol{\omega}_\theta$および$\boldsymbol{\omega}_\psi$の各方向は,対称な配置にはなっていない.$\boldsymbol{\omega}_\phi$は空間軸の$z$軸に沿い,$\boldsymbol{\omega}_\theta$は節線の方向にあって,$\boldsymbol{\omega}_\psi$だけが剛体系の$z'$軸に沿っている.しかし,第4−4節の直交変換$\mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}$を利用すると,任意の座標軸の方向におけるこれらのベクトルの成分を与えることができる.

運動方程式を論じるためには,剛体軸が最も有用であることがわかる.した

がってωの成分を，そのような座標系について求めておこう．$\boldsymbol{\omega}_\phi$は空間z軸に平行であるから，その剛体軸に沿う成分は，合成された直交変換$\mathbf{A}=\mathbf{BCD}$，（4－46）式を適用することによって得られる．すなわち，

$$(\boldsymbol{\omega}_\phi)_{x'}=\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi, \qquad (\boldsymbol{\omega}_\phi)_{y'}=\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi, \qquad (\boldsymbol{\omega}_\phi)_{z'}=\dot{\phi}\cos\theta,$$

である．節線は$\boldsymbol{\omega}_\theta$の方向にあって，$\xi'$軸と一致するから，剛体軸に関する$\boldsymbol{\omega}_\theta$の成分は，最後の直交変換$\mathbf{B}$，（4－45）式だけを適用すれば得られて，

$$(\boldsymbol{\omega}_\theta)_{x'}=\dot{\theta}\cos\psi, \qquad (\boldsymbol{\omega}_\theta)_{y'}=-\dot{\theta}\sin\psi, \qquad (\boldsymbol{\omega}_\theta)_{z'}=0,$$

となる．$\boldsymbol{\omega}_\psi$はz'軸の方向を向いているから，その成分に対しては変換を行う必要はない．個々の角速度に対するこれらの成分を加え合わせると，剛体軸に関するωの成分は，

$$\begin{aligned}\omega_{x'}&=\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi,\\ \omega_{y'}&=\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi,\\ \omega_{z'}&=\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi},\end{aligned} \qquad (4-125)$$

p.177
となる．同じような技巧を使って，空間軸に沿うωの成分を，Eulerの角で表わすことができる*.

4－10　Coriolisの力

（4－124）式は，剛体に対する力学的な運動方程式の基礎になる，基本的な運動学的法則である．しかし，その有効性は，剛体の運動だけに限られているわけではない．質点，あるいは質点系の運動を，回転座標系に関係して議論したいときには，いつでもこの関係を利用することができる．この後者の部門における最も重要な問題は，質点の運動を，地球と一緒に回転している座標系に相対的に記述することである．第1－1節で，慣性系は，その中でNewtonの運動法則が成立するような座標系として定義されたことを思い出そう．多くの目的のためには，回転する地球に固定された座標系は，慣性系に対する十分よい

*）（4－125）式は，Eulerの角に対するx-規約に関するものである．Eulerの角に対して他の規約を使った場合の対応する公式は，付録Bに与えられている．

近似である．しかしながら局所的な星が固定されている座標系（局所恒星系）は，理想的な慣性系にもっと近いものである．詳しく調べてみると，この殆ど完全な慣性系に相対的な地球の回転から生ずる，観測にかかる効果があることが示される．（４－124）式は，回転する地球に固定された**非慣性系**（*noninertial* system）に相対的な運動方程式の，必要な修正を与えてくれる．

最初の段階は，地球に固定された座標系の原点から，与えられた質点に至る動径ベクトル $\mathbf{r}$ に，（４－124）式を適用することである．その結果，

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \qquad (4-126)$$

となる．ここで $\mathbf{v}_s$ および $\mathbf{v}_r$ は，それぞれ空間軸および回転する座標軸に相対的な質点の速度である．また，$\boldsymbol{\omega}$ は慣性系に相対的な地球の回転の（一定の）角速度である．第２の段階では，$\mathbf{v}_s$ の時間的変化率を求めるために，(4－124) 式が再び利用される．すなわち，

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)_s = \mathbf{a}_s &= \left(\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_s \\ &= \mathbf{a}_r + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}),\end{aligned} \qquad (4-127)$$

である．ここで，（４－126）式から得られる $\mathbf{v}_s$ を代入した．$\mathbf{a}_s$ および $\mathbf{a}_r$ は，２つの座標系の各々における，質点の加速度である．最後に，慣性系では，簡単に，

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_s,$$

となる運動方程式を，回転座標系で表わすと，

$$\mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\mathbf{a}_r, \qquad (4-128)$$

p.178
のように展開される．したがって，回転系における観測者にとっては，その質点は，

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \qquad (4-129)$$

で与えられる有効力 $\mathbf{F}_{\text{eff}}$ の作用の下で運動しているように見える．

（４－129）式の右辺の各項の性質を調べてみよう．最後の項は，$\boldsymbol{\omega}$ に垂直なベクトルで，回転軸から外側に向いている．さらに，その大きさは $m\omega^2 r \sin\theta$

である．したがって，この項は単に，よく知られている遠心力に他ならないことがわかるであろう．質点が，回転系において静止しているときには，この遠心力が有効力の中のただ１つの付加項である．しかし，質点が運動しているときには，**Coriolisの力**として知られている第２項が作用しはじめる．これら２つの力の大きさの程度は，地球の表面上にある質点に対しては，容易に計算することができる．地球は，恒星に相対的に北極のまわりを，反時計まわりに角速度，

$$\omega = \left(\frac{2\pi}{24 \times 3600}\right)\left(\frac{366.5}{365.5}\right) = 7.292 \times 10^{-5}\,\mathrm{sec}^{-1},$$

で回転している．ここで最初の括弧は，太陽への動径ベクトルに相対的な角速度を与える．第２の括弧の中の量は，１年の中の恒星日の数の太陽日の数に対する比であるが，それは恒星に相対的な角運動量を与えるための補正因子である．ωのこの値と，地球の半径に等しいrを用いると，遠心加速度の最大値は，

$$\omega^2 r = 3.38\,\mathrm{cm/sec^2},$$

すなわち，重力の加速度の約0.3％である．この加速度は，小さいけれども，完全に無視してよいものではない．しかしながら，重力の，測定される効果は地球の質量分布による重力場と遠心力の効果の結合したものである．これら２つの和を，地球の**万有引力場**（*gravitational* field）とは区別して，地球の**重力場**（*gravity* field）というのが習慣になってきている．

状況は，回転する地球を扁平にしようとする遠心力の効果によって，さらに複雑になる．もし地球が仮りに完全に流体であったとすれば，回転の効果はその表面を，結合された重力場の等ポテンシャル面である楕円体の形に変形させることになるであろう．地球上の海の平均水準面は，このつり合いの楕円体面に極めて近くなり（風や潮による局地的な変化を除いて），地球の**ジオイド**（*geoid*）と呼ばれるものを定義するであろう．局地的な摂動の影響を除けば重力はジオイドの等ポテンシャル面に垂直になるであろう．したがって，局地的な鉛直線は，その表面上の与えられた点におけるジオイドへの垂直な方向として定義されるだろう．地球上の特定の点の近傍で起こる現象に対しては，

(4－129)式における遠心力の項は，局所的な鉛直方向に向いている重力の加速度 **g** の中にくりこまれていると考えることができる．**g** の大きさは，もちろん地球上の緯度によって変わる．地球の遠心加速度および扁平化の効果は，結びついて，**g** の値を極においてよりも赤道において 0.53％小さくすることになる．

p.179
偶然に，太陽のまわりの地球の公転から生ずる，粒子に働く遠心力が，重力にくらべてかなりの大きさになることがあるが，しかし，それは殆んど太陽への引力で相殺される．もちろん，地球(およびその上のすべてのもの)を，太陽のまわりの軌道にとどめているのは，正にこの遠心力と万有引力とのつり合いに他ならない．

運動している粒子に作用する Coriolis の力は，**ω** と **v** の両方に垂直である*．北半球では，**ω** が地表から外を向いているので，Coriolis の力 $2m(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})$ は，地表に沿って撃ち出した弾丸を，その進行方向に向って右側に偏らせようとする傾向を生じる(図4－12参照)．Coriolis の偏りは，南半球ではその向きが逆になり，**ω** が水平方向になる赤道においては零である．Coriolis の加速度の大きさは，常に，

$$2\omega v \simeq 1.5\times10^{-4}v,$$

よりも小さい．この値は，10^5 cm/sec(約 2000 mph)の速さに対して 15 cm/sec^2，すなわち約 0.015 g である．普通そのような加速度は極めて小さいが，それが重要になるような例がある．人為的な例をとって，北極にいる軍艦から，水平方向に弾丸が射出されたとしよう．Coriolis の加速度はその場合には $2\omega v$ の大きさをもっているから，t 秒後の直線的な(長さで測った)偏りは ωvt^2 である．偏りの角は，直線的な長さで測った偏りを，進行距離で割れば得られる．すなわち，

$$\theta=\frac{\omega vt^2}{vt}=\omega t \qquad (4-130)$$

となる．これはちょうど t 秒間に地球が自転する角である．この結果は物理的には次のことを意味している．すなわち，北極で射出された弾丸は，最初回転運動

---

*) これから後，速度はすべて回転座標系についてだけ考えるから，v の添字 r は落すことにする．

をしていないから，その弾道は慣性系から見たときには直線である．見かけの偏りが現われるのは，その下で地球が自転しているためである．(4−130)式に100秒というp. 180飛行時間――大きな弾丸に対しては，この値は異常なものではない――を代入すると，この効果の大きさに対して或程度の概念を得ることができる．その場合には偏りの角は，7×10^{-3} ラジアン，すなわち0.4°程度であって，あまり小さいものではない．飛行時間がこれよりもはるかに長い長距離ミサイルに対しては，明らかにこの効果はなお一層重要になる．

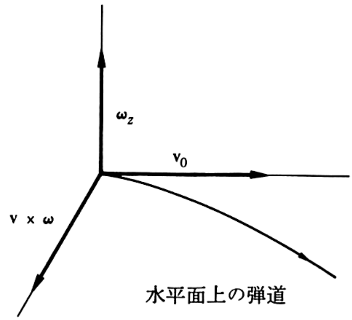


図4−12
北半球におけるCoriolisの偏りの方向．

Coriolisの力は，大量の物質が長い距離にわたって変位することを含む，海洋学や気象学上の多くの現象に対しても重要な役割を演ずる．その例としては，貿易風の循環の模様やメキシコ湾流の道筋などがある．これらの現象を完全に記述するためには，Coriolisの加速度が，その他多くの項の中の1つとして含まれている，複雑な流体力学的な問題の解が必要である．しかしながら，1つの非常に簡単化された気象学の問題――広い範囲にわたる，水平な風の循環――を考えることによって，Coriolisの力の寄与についていくらかのことを示すことができる．空気の塊りは，他の事情が同じなら，高圧の領域から低圧の領域へ移動しようとする――いわゆる圧力勾配による流れである．鉛直方向では，圧力勾配は大雑把にいって重力とつり合っているから，空気の塊りの持続的な広範囲にわたる運動は，水平面内でのみ起こる――これをわれわれは風と感じるのである．圧力勾配による力はごく小さいものであって，通常の速さで動く空気の塊りに対しては，Coriolisの力と同程度の大きさである．Coriolisの力がないとすれば，風の方向は理想的には，図4−13に示されているように，等圧線に垂直である．しかしながら，Coriolisの力は，図に示されているように，風をこの方向に向って右向きに偏らせる．右への偏りは，風のベクトルが等圧線に平行になるまで続き，Coriolisの力は圧力勾配による力と反対方向にあっ

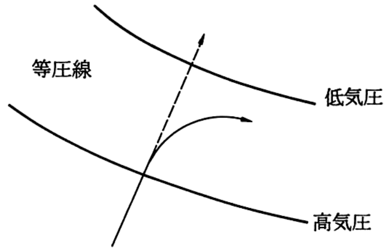


図4－13
Coriolisの力による，圧力勾配の方向からの風の偏り（北半球について示す）．



（a）理想化された場合　（b）実際の場合

図4－14
北半球におけるサイクロンの模様．

て，理想的にはちょうどその力とつり合う．そうすると，風は，等圧線に平行に吹きつづけ，北半球では，低気圧の中心のまわりに反時計まわりに循環する．南半球では，Coriolisの力は反対向きに作用し，サイクロンの（cyclonic）（すなわち低気圧の中心のまわりの流れの）向きは時計まわりである（このような等圧線に平行に偏っている風の流れは**地衡風**（*geostrophic wind*）として知られている）．この簡単化された描像では，摩擦の効果は無視されている．数km p. 181 よりも大気高度の低い所では，渦粘性（eddy viscosity）の摩擦効果が重要になって，つり合いの状態で吹いている風の方向は，図4－14に示すように決して等圧線にちょうど平行にはならない．

Coriolisの力が，測定可能な効果を生ずる他の古典的な例は，自由落下をす

る質点の鉛直線からの偏りである．質点の速度は殆ど鉛直方向で，$\boldsymbol{\omega}$は南北方向の鉛直面内にあるから，偏りを起こす力 $2m(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})$ は東西方向にある．すなわち，北半球では，自由に落下する物体は東に偏るであろう．この偏りの計算は，地球に固定した z 軸を，前に定義したように，鉛直上向きの方向に選ぶと非常に簡単になる．y 軸を北向きにとれば，x 方向（東の方向）の運動方程式は次のようになる．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v})_x$$
$$= -2m\omega v_z \sin\theta, \qquad (4-131)$$

ここで θ は余緯度である．v_zに対するCoriolisの力の効果は，偏りに対する小さな補正となるが，偏り自身大変小さいものである．したがって（4－131）式に現われる鉛直方向の速さは，Coriolisの力がないものとして計算してよい．すなわち，

$$v_z = -gt,$$

で，また，

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g}},$$

である．これらの値を用いると，（4－131）式は容易に積分することができて，偏りとして

$$x = \frac{\omega g}{3}t^3\sin\theta,$$

あるいは，

$$x = \frac{\omega}{3}\sqrt{\frac{(2z)^3}{g}}\sin\theta,$$

p.182 が得られる．偏りの大きさの程度は $\theta = \pi/2$（赤道に相当する），$z = 100\,\mathrm{m}$ と仮定して求めることができる．そのときの偏りは，およそ，

$$x \simeq 2.2\,\mathrm{cm},$$

である．この小さい偏りは，[*] 風の流れ，粘性その他の妨害による影響のために，しばしば覆いかくされてしまうから，実際に実験を行うことはむずかしい．

Coriolisの力がもっと容易に観測できるのは，有名な Foucaultの振子の実験である．北極において，与えられた鉛直面内で振子を振らせると，この平面に垂直な方向の線運動量は零であるから，振子は慣性系において一定の方向をもつこの平面内で振動し続けるが，その下で地球は自転している．したがって，地球上にいる観測者にとっては，振動面が1日に1回転するように見える．その他の緯度の所では，結果はもっと複雑であるが，その現象は定性的には同じである．詳しい計算は，演習問題として残しておこう．

Coriolisの力の項に基づく効果は，次に示すように，原子物理学においても現われる．多原子分子では，2つの型の運動が同時に起こりうる．すなわち，分子は全体として剛体的に回転し，その中で原子がつり合いの位置のまわりで振動する．振動の結果として，原子は分子に固定された回転座標系に相対的に運動する．そうすると，Coriolisの項は零ではなくなるから，原子はそのために，最初の振動に垂直な方向に運動することになる．このようにして，Coriolisの力のために，分子スペクトルに生じる摂動は，分子の回転準位と振動準位間の相互作用として現われるのである．

参考書

R. R. Stoll, *Linear Algebra and Matrix Theory*.　線型代数に関する教科書文献は，非常に多く，束の間のものであって現在の目的のためには大部分使用することはできない．参考のために，ここでは熟考した上でこの1冊を選んだ．この書物はいくらか旧式であって，ゆっくりと述べられており，Euclid空間に強い興味を示し，またしばしば3次元の例が挙げられている．この章での物理には，高水準の数学的展開は要求されていない．

G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*.　このような書名の教科書は，通常行列と1次変換のいくらかの取り扱いを含んでおり，Arfkenの書物はこれらの中で最良の代表的なものである．行列と行列式に関する第4章は，特に本書と関係が

*) (4−13)式を用いて，上向きに投げ上げられた質点は，最初の発射地点よりも西側の地面に落ちてくるであろうということは容易に示される．

あり，多くの有用な問題が集められている．Pauli の行列は，その 4 次元への一般化である Dirac の行列と共に，ここで論じられている．

H. JEFFREYS AND B. S. JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics.* 今となってはいささか年数のたった教科書ではあるが，この参考書の中には，理論物理学における著者の長い研究経験から生れた，豊富な物理的な応用が含まれている．この章の話題の多くは，第 3 章と第 4 章で論じられている．Pauli のスピン行列の取り扱い，およびそれと 3 次元空間の回転を表わす行列との関係も含まれている．Euler の角について
p.183 述べてある節は，主として図がまずいために，理解しにくい．各章の初めに，適切で気のきいた引用文があり，それだけでも読んでみる価値がある．第 7 章に与えられているものは，多分誤まって引用されたものであろうが，それがかえって，そのために鋭いユーモアになっている．

J. B. MARION. *Principles of Vector Analysis.* これはポケットサイズのペーパーバックに過ぎないが，著者は，直交変換行列の性質や，軸性および極性ベクトルの変換性に広くかつ詳細に立ち入っている．ここおよび後の節では，例えば複雑なベクトル恒等式の導出における場合のように，順列記号がかなり用いられている．

J. L. SYNGE AND A. SCHILD. *Tensor Calculus.* この章で特に興味のあるいくつかを含めて　テンソルの多くの側面にわたって論じている有名な単行書である．第 4.2 節では，不承不承，平らな空間におけるテンソル特に順列記号の性質が考察されている（われわれが本書で考えるのは平らな空間だけである）．第 7 章では，擬ベクトルのテンソルへの一般化である，相対テンソルあるいは擬テンソルが考察されている．2 つの章が，普通とはいくらか異なった観点から，力学を含む物理学への応用の考察にあてられている．

A. I. BORISENKO AND I. E. TARAPOV, *Vector and Tensor Analysis with Applications.* 専ら物理学の応用の立場を貫ぬいて書かれているけれども，その方法と観点はしばしばここで用いられるものとは異なっている．著者達は，直交軸に沿う単位ベクトル $\mathbf{n}_i$ を用いて計算することを大変好んでいる．例えば，ϵ と同じ性質をもつ反対称テンソルの変換性の証明において，順列記号を $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_k$ とする表現を用いている．

E. T. WHITTAKER. *Analytical Dynamics.* 第 I 章には，われわれの目的にとって適切な題材が含まれている．Euler の角に関する節には，図が 1 つもないために，理解するのがむずかしい．この書物の式を，われわれの式と比較するときには，第 4 − 5 節の脚註に述べておいたことを参照する必要がある．第 12 節では，いわゆるホモグラフィック変換（homographic transformation）に対する，Cayley-Klein のパラメー

ターの関係が論じてある。

L. A. PARS, *A Treatise on Analytical Dynamics.* 真に記念碑的な学術書として，この書物は，学問的なケンブリッジの伝統に満ちた，Whittakerの現代の後継者のように感じられる。これは，あたかもキャップとガウンをまとったように見える書物であって，Whittakerのように豊富な学識を示している。第Ⅷ章が，回転の理論に当てられており，多くの他の項目と共に，特に回転公式の3つの別々な証明が含まれている。Chaslesの定理の強い形（上の214ページ脚註を見よ）に，Newtonの**プリンキピア**（*Principia*）の中にあってもよいような，簡単な幾何学的証明が与えられている。

G. HAMEL, *Theoretische Mechanik.* ドイツ語のできる人達は，この書物の主として第2章の第8節と9節の中に，剛体回転の運動学についての情報のほとんど完全な百科全書的な記述が含まれていることを見出すであろう。その例は，ステレオ投影のCayley-Klein，および，Eulerのパラメータに対する関係や，回転の4元数表示の徹底的な議論である。この書物が著わされた物理学の世界は，およそ1925年の頃のものである。この書物の終りには，260ページにわたる，演習問題およびその解答を含む節がある。

T. C. BRADBURY, *Theoretical Mechanics.* 中級の教科書といわれているけれども，ここで興味のある項目は大部分扱われており，あるものはむしろ普通とは異なった観点から，取り扱われている。第1章と第3章では，行列について，ここでの基礎とほぼ同じように，しかしいくらか掘り下げて述べられている。順列記号の性質が，はっきりと論じられている。回転系における運動に対しては，有効ラグランジアンが作り上げられ，その中ではCoriolisの力が，いくらかとってつけたような仕方で導入された，速度に依存するポテンシャルから導かれている。この書物は，そのような非慣性系における運動を研究するための効果的な手段を与える。

p. 184
E. J. SALETAN AND A. H. CROMER, *Theoretical Mechanics.* より進んだ観点から書かれた，この書物は，中位に抽象化されたレベルの現代数学を十分に使っている。行列と力学におけるその応用は，線形ベクトル空間の議論の1部として，第4章で述べられている。x-規約におけるEulerの角を含む回転の運動学は，それにつづく章に出ている。群論とLie代数の立場からの回転については，第9章に簡単にその展望が述べられている。

F. D. STACEY, *Physics of the Earth.* 回転する地球の表面上で観測される"重力"（gravity）場は，地球の形が球からはずれているために複雑になる。この書物の第2，3章には，とりわけ，これらの効果の詳細だが要約された議論が含まれている。Coriolisの力の現象には言及されていない。

G. HERZBERG, *Infrared and Raman Spectra.* 多原子分子のスペクトルに対するCoriolisの力の効果については，特に第Ⅳ章の第1節と第2節で徹底的に論じられている．ただ，これを完全に理解するためには，微小振動の理論（本書の第6章を見よ）と，量子力学の基礎的な知識が必要である．しかし簡単な古典的取扱いについては，372ページから375ページまでを見よ．

S. L. HESS, *Introduction to Theoretical Meteorology.* この書は，第11章と12章に，大気中の風に対するCoriolisの力の効果の注意深く詳細な説明が与えられている．第13章には，いわゆる，流体力学の循環定理（circulation theorem）の中のCoriolisの項の議論がある．その導出は，初等的なレベルであるにもかかわらず，骨の折れるものであり，又第1原理にまで遡るものである．

演 習 問 題

1. 行列の掛け算は結合法則に従うことを証明せよ．直交行列の積はまた直交行列になることを示せ．

2. 転置行列および随伴行列について，次の性質を証明せよ．

$$\widetilde{\mathbf{AB}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}},$$
$$(\mathbf{AB})^{\dagger} = \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}.$$

3. 行列のトレースは，任意の相似変換に対して不変であることを示せ．また，行列の反対称性は直交変換に対して変わらないのに対して，エルミート性は任意のユニタリー相似変換に対して不変であることを示せ．

4. a）3×3 反対称実行列 $\mathbf{A}$ の固有値を調べることによって，$\mathbf{1} \pm \mathbf{A}$ は非特異（non-singular）であることを示せ．

b）そのとき，同じ条件の下で，行列

$$\mathbf{B} = (\mathbf{1} + \mathbf{A})(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1},$$

は直交行列であることを示せ．

5. Eulerの角で表わした一般の回転行列の行列要素，（4－46）式を，その相続く成分回転の行列の掛け算を行うことによって求めよ．その行列要素が直交条件に従うことを直接証明せよ．

6. a）単位法線ベクトルが $\mathbf{n}$ である平面による $\mathbf{r}$ の鏡映を記述するベクトル方程式を求めよ．

p.185

b）l_i, $i = 1, 2, 3$ を $\mathbf{n}$ の方向余弦とするとき，変換の行列は，要素，

$$A_{ij} = \delta_{ij} - 2l_i l_j,$$

をもつことを示し，**A**は非固有直交行列であることを証明せよ．

7. 剛体軸は空間軸と，次のような回転の組によって，Eulerの角を用いて関係づけることができることを示せ．

1） x 軸のまわりの角 θ の回転．

2） z' 軸のまわりの角 ψ の回転．

3） 元の z 軸のまわりの角 ϕ の回転．

この一連の回転は，本文で与られた一連の回転と，同じ変換行列要素に導くことを示せ〔ヒント：回転行列の積をあからさまに実行する必要はない〕．

8. **A**を任意の軸のまわりの180°の回転の行列とすると，もし，

$$\mathbf{P}_{\pm} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \mathbf{A}),$$

であるとすれば，$\mathbf{P}_{\pm}^2 = \mathbf{P}_{\pm}$であることを示せ．任意の適当な系において$\mathbf{P}_{\pm}$の要素を求め，また任意のベクトル**F**に対する，操作$\mathbf{P}_{+}$および$\mathbf{P}_{-}$の幾何学的解釈を見出せ．

9. 平面上において，球を"ころがらせる"拘束を，Eulerの角で表わせ．この条件は積分不可能であり，したがって，その拘束は非ホロノミックであることを示せ．

10. a)（4－67）式の形の回転行列は，反転行列**S**の行列の形にすることはできないことを示せ．

b） 直接掛け算を行って（4－67）式の行列は直交であることを証明せよ．

11. 任意の回転は，2つの平面についての相続く鏡映によって表現することができることを示せ．これら2つの平面は共に回転軸を通り，それらの間の平面間の角は$\Phi/2$である．

12. **B**が正方行列で，**A**を**B**の指数関数とする．それは指数関数の無限級数展開によって定義される．

$$\mathbf{A} \equiv e^{\mathbf{B}} = \mathbf{1} + \mathbf{B} + \tfrac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \cdots + \frac{\mathbf{B}^n}{n!} + \cdots.$$

そのとき，次の性質を証明せよ．

a） $e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{C}} = e^{\mathbf{B}+\mathbf{C}}$,　　ただし**B**と**C**とは可換であるとする．

b） $\mathbf{A}^{-1} = e^{-\mathbf{B}}$

c） $e^{\mathbf{CBC}^{-1}} = \mathbf{CAC}^{-1}$

d） **B**が反対称ならば**A**は直交．

e） **B**がエルミートならば，$e^{i\mathbf{B}}$はユニタリー．

13. $\mathbf{Q}_\theta$は，記号的には，

$$\mathbf{Q}_\theta = e^{i\sigma_1(\theta/2)},$$

の形に書けることを示せ．ここで，指数関数は初項が**1**である，その級数展開を表わすものと考える．

14. a) 3つのPauliのスピン行列はお互いに反可換である，すなわち，

$$\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j = -\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_i, \qquad i \neq j$$

p.186
であることを示し，またそれらが次の交換関数に従がうことを示せ．

$$\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_i \equiv [\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\boldsymbol{\sigma}_k.$$

b) i のすべての値に対して，$\boldsymbol{\sigma}_i^2 = \mathbf{1}$を証明せよ．

c) $\boldsymbol{\sigma}$が$\boldsymbol{\sigma}_i$を成分とするベクトルを表わすならば，**A**と**B**を任意の2つのベクトルとして，

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{1}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}),$$

であり，したがって，

$$[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}] = 2i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}),$$

であることを示せ．

15. z軸が有限回転の回転軸であるような1組の座標軸に対して，回転行列は，(4－44)式で角θを有限回転の角Φで置き換えたもので与えられる．任意の座標系へ変換し，変換の直交行列を，有限回転の軸の方向余弦で表わすことによって，回転公式(4－92)を導け．

16. a) (4－73′)式を基にして，

$$\mathbf{r}'\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma} + [\mathbf{Q}, \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}]\mathbf{Q}^{+},$$

であることを示せ．

b) この結果と，**Q**に対する表現(4－98)式および上の演習問題14を用いて，回転公式(4－92)を導け．

17. a) 角Φの単一回転と等価な，角Φ_1およびΦ_2の2つの相続く座標回転が行われるとしよう．Φ_1, Φ_2およびΦは，Φの対角が回転の2つの軸の間の角によって与えられる，球面三角形の辺と考えることができることを示せ．

b) 任意の与えられた軸のまわりの回転は，おのおのが角180°の，2つの相続く回転の積として得られることを示せ．

18. a) 順列記号は，Kroneckerのデルタ記号で表わされた次の恒等式を満足することを証明せよ．

$$\epsilon_{ijp}\epsilon_{rmp} = \delta_{ir}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jr}.$$

b) $\epsilon_{ijp}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{pk}$,

であることを示せ。

19. 空間軸の方向の角速度の成分は，Euler の角を用いて次のように表わされることを示せ。

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi,$$
$$\omega_y = \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi,$$
$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}.$$

20. Euler のパラメーター e_0 は次の運動方程式をもつことを示せ。

$$-2\dot{e}_0 = e_1\omega_{x'} + e_2\omega_{y'} + e_3\omega_{z'}.$$

ここで，プライムは剛体軸を表わす．他の3個のEulerのパラメーターに対して，また複素Cayley-Kleinのパラメーター α，β に対して，対応する方程式を見出せ。

21. （4－117）式で与えられる，無限小回転の行列生成演算子 $\mathbf{M}_i$ は，交換関係，

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{M}_k,$$

に従がうことを直接証明せよ．

p.187
22. 1個の質点が，初速 v_0 で鉛直上方に投げ上げられ，最高の高さに達して地面に戻ってくる。それが再び地面に達するときのCoriolis の偏りは，それが同じ最高の高さから静止の状態で落されたときのCoriolisの偏りとは，方向が反対で，大きさが4倍であることを示せ。

23. 地球の表面に沿って水平方向に弾丸が発射される。第1近似では，Coriolisの力によって生ずる発射方向からの角度の偏りは，

$$\omega\cos\theta,$$

の割合で時間に対して1次関数的に変化することを示せ。ただし，ω は地球の自転の角振動数，θ は余緯度で，偏りの方向は，北半球では右向きである。

24. Foucault の振子の実験とは次のようなものをいう。すなわち，自転している地球の表面上の1点で，長い振子をその運動量が最初その振子の重りとその支点を含む鉛直面内にあるようにして運動させるのである．振子のその後の運動量は，1日に $2\pi\cos\theta$ ラジアンの割合で，その振動面が一様に回転する，ということによって表わすことができることを示せ。ただし θ は余緯度である。回転の向きはどうか？ 使いたければ，微小振動の近似を使ってもよい。

第５章　剛体の運動方程式

p.188
第４章では，剛体の運動を論じるのに必要な運動学的な道具立をすべて述べておいた．まず，Eulerの角として３つの座標の組が得られた．それらは，むしろ非対称的に定義されてはいるが，剛体の方位を記述する一般化座標としては適当なものである．さらに，直交変換と，それに関連した行列代数の方法は，剛体の運動の特徴を調べるための，有力でしかもすっきりした手法を与える．すでに，その手法を用いて，１つのベクトルの変化の割合を，空間に固定された座標系から見た場合と，剛体に固定された座標系から見た場合との関係を与える式（４－124）を導いた．この章では，これらの道具立を用いて，剛体の力学的な運動方程式を，最も便利な形で求めることにしよう．この運動方程式の助けによって，剛体の運動に関する簡単ではあるが，極めて重要な問題のいくつかを論じることができる．

5−1　１点のまわりの運動の角運動量と運動エネルギー

Chaslesの定理によれば，剛体の任意の一般的な変位は，１つの並進と，１つの回転によって表わすことができる．この定理から，剛体の運動の問題は，２つの別々な面に分けることができるはずであるということが示唆される．その１つは，剛体の並進運動だけに関係する面であり，もう１つは回転運動だけに関係する面である。もちろん，剛体の１点が固定されていれば，この分離は明らかである。なぜなら，その場合には，固定点のまわりの運動だけで，並進運動はないからである．しかし，一般的な型の運動に対しても，しばしばこのような分離を行うことができる．剛体の運動を記述するために必要な６個の座標

は，すでにそのような分離に応じて，２組に分けられている．すなわち，並進運動を記述するための剛体に固定された１点の３個の直交座標と，その点のまわりの運動を記述するための座標，例えば，Eulerの３つの角がそれである．さらに，剛体に固定された座標系の原点を，質量中心にとると，(１－28)式によって，全角運動量は，質量中心の並進運動からの寄与と，質量中心のまわりの回転運動からの寄与とに自然にわかれる．前の項は，質量中心の座標のみを含み，後の項は角座標のみを含む．(１－31)式によれば，運動エネルギーTに対
p. 189
しても同じような分離ができて，次の形に書くことができる．

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + T'(\phi, \theta, \psi).$$

これは，剛体の全質量が質量中心に集まったと考えたときの運動エネルギーと，質量中心のまわりの回転運動の運動エネルギーとの和の形になっている．

位置エネルギーも同じように分けることができ，各項が並進あるいは回転のいずれか一方の座標のみを含むようにすることができる場合がしばしばある．たとえば，一様な重力場での位置エネルギーは，重心の直交座標の鉛直成分のみに関係するであろう*．あるいは，もし物体に働らく力が，その物体の磁気双極子モーメント**M**に作用する一様な磁場**B**によるものであれば，そのポテンシャルは，**M**·**B**に比例し，これは物体の方位だけしか含んでいない．確かに，実際に解くことのできる殆どすべての問題では，上に述べたような分離を行うことができる．そのような場合には，力学の問題は事実上２つに分離される．なぜなら，ラグランジアン$L = T - V$が，並進運動の座標のみを含む部分と，角座標のみを含む部分との２つの部分にわかれるからである．そうすると，これら２つの座標の組は完全に分離されてしまって，並進運動と回転運動の問題は，互いに独立に解くことができる．したがって，剛体に固定されたある点のまわりの運動に対する角運動量，および運動エネルギーの表式を求めることは，明らかに重要なことである．それらを求めるために，剛体中に固定された座標系における導関数と，空間に固定された座標系に関する導関数とを関係づける(４－124)式をしばしば用いることになる．剛体の変位を表わす回転角や，瞬

*) もちろん，重心は，一様な重力場では質量中心に一致する．

間的な角速度ベクトルが，剛体に固定された座標軸の，原点の選び方に依存しないということは，直観的に明らかである．物体が剛体であるために本質的なことは，その物体の各点が一緒に運動し，回転するということである．このことから容易に形式的な証明をすることができる．いま$\mathbf{R}_1$，$\mathbf{R}_2$を空間に固定された座標系に関する，剛体に固定された２つの座標系の原点の位置ベクトルとし
p.190
よう（図５－１参照）．その差を表わすベクトルを$\mathbf{R}$と記すことにしよう．すなわち，

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R},$$

であるとする．第２の座標系の原点を，第１の座標系に関して定義された１つの点であると考えると，$\mathbf{R}_2$を空間に固定された座標系から見たときの，時間に関する導関数は，

$$\left(\frac{d\mathbf{R}_2}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{R}_1}{dt}\right)_s + \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{R}_1}{dt}\right)_s + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R},$$

で与えられる．最後の変形は，剛体に関して固定された任意の座標系に関して，$\mathbf{R}$の導関数は零になることを思い出せば，（４－124）式から導かれる．ただし$\boldsymbol{\omega}_1$は第１の座標系の角速度ベクトルである．第１の座標系の原点を，第２の座標系に関して，位置ベクトルが$-\mathbf{R}$である固定された点であると考えることもできる．このときには，同様にして，空間に固定された座標系に関する

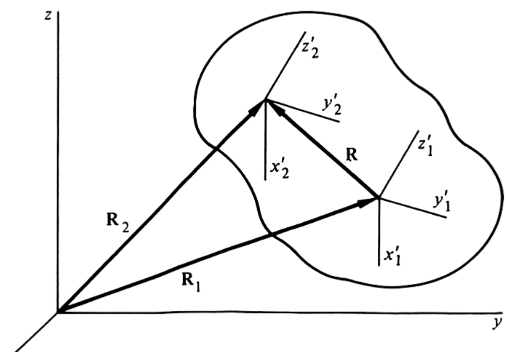


図５−１
異なる原点をもつ剛体軸の組の間のベクトル的な関係．

原点に対して，位置ベクトル $\mathbf{R}_1$ の導関数は,

$$\left(\frac{d\mathbf{R}_1}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{R}_2}{dt}\right)_s - \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{R}_2}{dt}\right)_s - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}\,,$$

で与えられる．これらの2式を比較すると，予想されたように，２つの角速度ベクトルは等しくなければならないことが示される．すなわち,

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2\,,$$

である．すなわち，角速度ベクトルは，剛体に固定されたすべての座標系に対して同じなのである．

剛体がその１点を固定されて運動するときには，その点のまわりの全角運動量は（和に関する規約を用いると）,

$$\mathbf{L} = m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)\,, \qquad (5-1)$$

である．ここで $\mathbf{r}_i$ および $\mathbf{v}_i$ はそれぞれ第 i 番目の質点の，その固定点に対する動径ベクトルおよび速度である． $\mathbf{r}_i$ は剛体に対して固定されたベクトルであるから，空間に固定された座標系に対する速度 $\mathbf{v}_i$ は，固定点のまわりの剛体の回転運動だけから生じるものである．そうすると（４－124）式から, $\mathbf{v}_i$ は,

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i\,, \qquad (5-2)$$

となる．したがって,（５－１）式は,

$$\mathbf{L} = m_i(\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i))\,,$$

あるいは，ベクトル３重積を展開して,

$$\mathbf{L} = m_i(\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}))\,, \qquad (5-3)$$

と書くことができる．さらにスカラー積も展開すると，角運動量の x 成分は,

$$L_x = \omega_x m_i(r_i^2 - x_i^2) - \omega_y m_i x_i y_i - \omega_z m_i x_i z_i\,, \qquad (5-4)$$

p.191

となる． $\mathbf{L}$ の他の成分についても同じような式が得られる．このように，角運動量の各成分は，角速度のすべての成分の１次関数である．すなわち，**角運動量ベクトルは，角速度とある１次変換によって結びつけられる．**（５－４）式が１次変換の式（４－12）と似ていることを強調するために, L_x を,

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z\,, \qquad (5-5)$$

と書くことにしよう．同じように L_y，L_z は，

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z,$$
$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z\,, \qquad (5-5)$$

と書ける．9個の係数 I_{xx}，I_{xy} などが変換行列の9個の要素である．この行列の対角要素は，**慣性モーメント係数**（*moment of inertia coefficients*）として知られており，例えば，

$$I_{xx} = m_i(r_i^2 - x_i^2), \qquad (5-6)$$

で示されるような形をもっている．これに対して，非対角要素は，**慣性乗積**（*products of inertia*）と呼ばれ，その典型的な形は，

$$I_{xy} = -m_i x_i y_i\,, \qquad (5-7)$$

である[1]．

（5－6）および（5－7）式の行列要素は，剛体が離れ離れの質点からできているとした場合に適した形に書かれている．連続的な物体に対しては，質点の質量を質量密度で置き換えて，和のかわりに体積積分をとればよい．このようにして，対角要素 I_{xx} は次のようになる．

$$I_{xx} = \int_V \rho(\mathbf{r})(r^2 - x^2)\,dV. \qquad (5-6')$$

記号を少し変えると，連続的な物体に対するすべての行列要素の式を書くことができる．すなわち，もし座標軸を，x_j，$j = 1, 2, 3$ と表わすと，行列要素 I_{jk} は次のように書くことができる．

$$I_{jk} = \int_V \rho(\mathbf{r})(r^2\delta_{jk} - x_j x_k)\,dV. \qquad (5-8)$$

いままでは，$\mathbf{L}$ を成分に分けるのに用いた座標系は，特別に指定しなかった．今後はその座標系として，剛体に固定した座標系をとるのが便利であ

1）慣性乗積は，この I_{xy} の符号を変えたもので定義することが多い．

る*. そうすると，距離 x_i, y_i, z_i は時間によらない定数となるから，行列要素も同じように定数である．この定数は考えている剛体に固有なものであって，その値はこれを表わすために用いる特定の剛体系の原点とその方位を定めれば決まる．

p.192
L と **ω** の成分を結びつける（５－５）式は，ただ１つの演算子方程式にまとめることができる．すなわち，

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \qquad (5-9)$$

である．ここで，記号 **I** は（５－５）式に現われる慣性係数を行列要素とする演算子を表わす．１次変換の演算子に対して与えられた２通りの解釈のうち（第４－２節参照），ここにでてきた **I** は明らかにベクトル **ω** に作用するものと考えるべきであって，座標系に作用するものと考えてはならない．**L** と **ω** は物理的に異なるベクトルであって，ディメンションが違っており，単に同じベクトルを２つの異なった座標系で表わしたものではない．**I** は回転の演算子と違って，ディメンション ── 質量×（長さ)^2── を持ち，どんな直交条件にもしばられていない．方程式（５－９）は，ベクトル **ω** に **I** を作用させると，物理的に異なったベクトル **L** が得られる，ということを意味するものと解釈すべきである．これから後，回転の演算子の議論において展開された行列代数の方法を縦横に用いるが，この章では特に演算子に対して，それ自身の性質およびその物理的特性の方により多くの注意を払わなければならない．しかしながら，まずある程度の数学的準備をする必要がある．テンソルやダイアディックに精通している読者は直ちに第５－３節に進んでよい．

5−2　テンソルとダイアディック

I という量は **L** と **ω** との商を定義するもの，すなわち，

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{L}}{\boldsymbol{\omega}},$$

---

*）第４章では，そのような座標系はプライムをつけて示した．しかしこの章では，空間に固定された座標軸の方向の成分が使われることはめったにないから，これから後は記法を簡単にするために，この約束はやめることにする．特に断わらない限り，今後この章ではすべての座標は剛体に固定されたものを指すことにする．

と考えることもできる．なぜなら，**I**と**ω**の積が**L**になるからである．ところで，2つの量の商は，これら2つの量と同じ種類の量ではなくて，もっと複雑な種類の量に属するようになることがしばしばある．例えば，2つの整数の商は一般には整数ではなく，有理数である．同じように2つのベクトルの商に対しては，よく知られているように，ベクトルという種類の範囲では，つじつまの合った定義を与えることはできない．それゆえ，**I**が**2階のテンソル**（*tensor of the second rank*）という新しい型の量であることが見出されたとしても驚くべきことではない．

われわれの目的に対しては，3次元のデカルト空間におけるN階のテンソル**T**を次のように定義しておけばよい．すなわち**T**は3^N個の成分$T_{ijk\cdots}$（N個の指標をもつ）をもち，それらが座標の直交変換**A**の下で，次の式，

$$T'_{ijk\ldots}(\mathbf{x}') = a_{il}a_{jm}a_{kn}\ldots T_{lmn\ldots}(\mathbf{x}), \qquad (5-10)$$

p.193

に従って変換される量である*．この定義によれば，零階のテンソルは1つの成分を持ち，直交変換に対して不変である．それゆえ，**スカラーは零階のテンソルである**．1階のテンソルは3つの成分を持ち，それらは，

$$T'_i = a_{ij}T_j ,$$

のように変換される．これをベクトルの変換式（4−12′）と比較すると，**1階のテンソルはベクトルと完全に同様である**ことがわかる**．最後に2階のテンソルの9個の成分は次のように変換される．

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl} , \qquad (5-11)$$

---

*）（直交した直線を座標軸にもつ）デカルト空間では，“共変”（covariant）と“反変”（contravariant）の間の区別はないので，その使い分けは不必要である．実際は，厳密にいえば，ここで定義されたテンソルは“デカルト的テンソル”と呼ばれるべきであろう（J. L. Synge and A. Schild, *Tensor Calculus*, Toronto 1949, pp. 127−136 を参照）．しかしながら，（第7−3節を除いて）この書物で用いられるテンソルは，この型のものだけであるから，後の議論ではこの形容詞は省くことにする．

）3次元の擬テンソル**（*pseudotensor*）は，反転を除いてテンソルと同じ変換をする．一般に，N階の擬テンソルの変換式は（4−110式参照），

$$T'_{ijk\ldots} = |\mathbf{A}|a_{il}a_{jm}a_{kn}\ldots T_{lmn\ldots} ,$$

である．剛体の運動には固有回転だけが含まれるので，一般的な擬テンソルは，ここではこれ以上用いられないであろう．

厳密にいうならば，２階のテンソル$\mathbf{T}$と，その成分によって作られる正方行列は区別しなければならない．テンソルは，直交変換の下におけるその変換性だけで定義されている．一方，行列はそれが受ける変換の型については何の制約も受けない．事実，それは特定の種類の変換に対する性質とはまったく無関係に考えることができる．しかしながら，この区別を過度に強調してはならない．直交変換という限られた領域では，それらは実際上同じものである．テンソル成分と行列要素とは同じように取り扱われる．そして，どのテンソル方程式にも，それぞれ１つの行列方程式が対応し，その逆も成り立つ．(4－41)式によって，正方行列$\mathbf{V}$の成分は，行列$\mathbf{A}$によって定義される座標の１次変換に対して，相似変換に従って，

$$\mathbf{V}' = \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1},$$

と変換される．したがって，直交変換に対しては，

$$\mathbf{V}' = \mathbf{A}\mathbf{V}\tilde{\mathbf{A}}, \tag{5-12}$$

あるいは，

$$V'_{ij} = a_{ik}V_{kl}a_{jl}, \tag{5-13}$$

が得られる．したがって，上の(5－11)式と比較すると，直交変換に対しては行列要素は２階のテンソルの成分と同じ変換をすることがわかる．“転置”(transpose)，“エルミート的”(hermitean)，“反対称”(antisymmetrical)等のような，すべての行列代数の用語や操作はまたテンソルにも適用できる．テンソルと行列の同等性は２階のテンソルに制限されない．例えば，１階のテ
p.194
ンソルであるベクトルの成分は，１行または１列の行列をなすことは既知のことであり，ベクトルの取り扱い方は対応する行列の場合とまったく同じである．

演算子$\mathbf{I}$のもう１つ別の有用な表現は，それをダイアディック(dyadic)として表わすことである．**ダイアッド**(*dyad*)とは単に，ある定まった順序に書かれたベクトルの対**AB**のことであって，[1] **A**は**前ベクトル**(*antecedent*)，**B**は**後ベクトル**(*consequent*)と呼ばれる．１つのダイアッドと１つのベクトル**C**

1) スカラー積と混同しないように注意せよ．

とのスカラー点積（scalar dot product）の作り方は２通りあって，次の２つのうちのいずれかによって行われる.[1] すなわち

$$\mathbf{AB}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}),$$

あるいは,

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{AB}=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}),$$

である．初めの場合には，**C**は**後因子**（*postfactor*），後の場合には**前因子**（*prefactor*）と呼ばれる．これら２つの積は一般に等しくないであろう．すなわち，ダイアッドとベクトルとのスカラー点積は可換でない．また，いずれの場合にも，この積は一般にベクトル**C**とは大きさも方向も異なる１つのベクトルであることに注意しなければならない．さらに２つのダイアッドの２重点積（double dot product）を,

$$\mathbf{AB}:\mathbf{CD}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}),$$

によって与えられるスカラーとして定義することができる．もっと便利な記法は，２重点積を,

$$\mathbf{AB}:\mathbf{CD}\equiv\mathbf{C}\cdot\mathbf{AB}\cdot\mathbf{D},$$

と書くことである.

ダイアディックは，ダイアッドの１次多項式として,

$$\mathbf{AB}+\mathbf{CD}+\cdots,$$

のように定義される．実際，任意のダイアッド**AB**は，**A**，**B**を単位ベクトル**i, j, k**を用いて成分で書き表わすことによって，ダイアディックとして表わすことができる．このように展開すると，ダイアッド**AB**は次のようになる.

$$\begin{aligned}\mathbf{AB}=\;&A_xB_x\mathbf{ii}+A_xB_y\mathbf{ij}+A_xB_z\mathbf{ik}\\&+A_yB_x\mathbf{ji}+A_yB_y\mathbf{jj}+A_yB_z\mathbf{jk}\\&+A_zB_x\mathbf{ki}+A_zB_y\mathbf{kj}+A_zB_z\mathbf{kk}.\end{aligned}\qquad(5-14)$$

1）スカラー点積は下の定義からわかるように，それ自身ベクトルである．２つのベクトルのスカラー積と混同しないように注意せよ.

(5－14)式はダイアッド**AB**の9元数形(*nonion form*)と呼ばれる．それは9個の係数が含まれているからである．明らかに，ダイアディックも同じようにして9元数形にすることができる．ダイアディックの9元数形の係数が，直交変換に対して2階のテンソルの成分とまったく同じ変換をするということは容易に示される(この章の演習問題1を見よ)．さらに，それらがベクトルに作用する演算子としての働らきも同じである．というのは **I** と **ω** の積が **L** を与えたように，ダイアッドまたはダイアディックとベクトルとのスカラー点積は新しいベクトルを与えるようになっていたからである．したがって，ダイアディックはすべての面で2階のテンソルと等価である．

9元数形，

$$\mathbf{1} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}, \qquad (5-15)$$

p.195
で定義される単位ダイアディック **1** は有用である．この単位ダイアディックという名称は，その行列が単位行列であり，また直接掛け算を行ってみると，

$$\mathbf{1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{1} = \mathbf{A},$$

となることから，適当なものであることがわかる．

5－3　慣性テンソルと慣性モーメント

I が **ω** を **L** に変換する線型演算子であると考えたとき，**I** の行列要素は2階のテンソルの成分のように振舞う．したがって，**I** という量は2階のテンソルと考えることができて，通例，**慣性モーメント・テンソル**(*moment of inertia tensor*)，あるいは簡単に**慣性テンソル**(*inertia tensor*)と呼ばれる．それは，ダイアディック記法を用いると，

$$\mathbf{I} = m_i(r_i^2\mathbf{1} - \mathbf{r}_i\mathbf{r}_i), \qquad (5-16)$$

の様に簡単に書き表わすことができる．なぜなら，このとき，

$$\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} = m_i(r_i^2\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i\cdot\omega)) = \mathbf{L},$$

となって，(5－3)式と一致するからである．**I** のダイアディック形を用いると，親しみ深いベクトル演算の方法をいままで通り用いることができるという点で

都合が良い．この方法によれば，きわめて自然に，回転の運動エネルギーをダイアディック $\mathbf{I}$ を用いて表わすことができる．１点のまわりの回転運動の運動エネルギーは，

$$T = \tfrac{1}{2}m_i v_i^2 ,$$

である．ここで $\mathbf{v}_i$ は空間に固定された座標系で測定された，固定点に対する i 番目の質点の相対速度である．(５－２)式によって，T はまた次のように書くこともできる．

$$T = \tfrac{1}{2}m_i \mathbf{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) ,$$

この式で，３重点積（スカラー３重積）におけるベクトルの順序をサイクリックに入れかえると，

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \cdot m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) ,$$

となる． i について和をとる量は，原点のまわりの剛体の角運動量であることがわかるであろう．したがって運動エネルギーは，

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2} , \qquad (５－17)$$

の形に書くことができる． $\mathbf{n}$ を $\boldsymbol{\omega}$ の方向の単位ベクトルとすれば，$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$ である．そうすると，運動エネルギーに対するもう１つの形として，

$$T = \frac{\omega^2}{2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \tfrac{1}{2} I \omega^2 , \qquad (５－18)$$

が得られる．ここで I は，

$$I = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = m_i (r_i^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n})^2) , \qquad (５－19)$$

で定義されるスカラーであって，**考えている回転軸のまわりの慣性モーメント**として知られている．

p.196
通常の初等的な議論では，１つの軸のまわりの慣性モーメントは，質点の質量と，その質点から軸までの垂直距離の２乗との積を，剛体を作っている質点全部にわたって加え合わせたものとして定義される．この定義が，(５－19)式で与えられるものと一致することを示さなければならない． i 番目の質点から

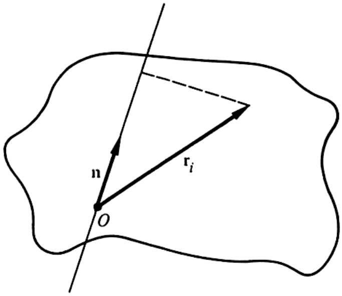


図5—2
慣性モーメントの定義を示す．

軸までの垂直距離は，ベクトル $\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}$ の大きさに等しい（図5－2参照）．それゆえ通常の I の定義は，

$$I = m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n})\cdot(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}),$$

と書くことができる．ω^2を掛けてω^2で割ると，この I の定義の式はまた次のように書くこともできる．

$$I = \frac{m_i}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)\cdot(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$

しかし，スカラー積を作っているそれぞれのベクトルは，まさに空間に固定された座標系において測定された相対速度 $\mathbf{v}_i$ である．したがって，上のように定義された I は，運動エネルギーと，

$$I = \frac{2T}{\omega^2},$$

によって関係づけられる．この式は（5－18）式と同じであり，したがって I は（5－19）式で定義されるスカラーと同じものでなければならない．

慣性モーメントの値は，回転軸の方向に関係する．そして，通常 $\boldsymbol{\omega}$ は時間がたつにつれて剛体に対してその方向を変えるので，慣性モーメントも時間の関数と考えなければならない．しかし，剛体が1つの固定軸のまわりに回転するように拘束されているときには，慣性モーメントは定数になる．そのよう

な場合には，（5−17）式の運動エネルギーは，ほとんどそのままでラグランジアンおよび運動方程式をつくるのに必要な形になっている．もう1つだけ必要なことは，$\boldsymbol{\omega}$をある角の時間に関する導関数として表わすことであるが，これは大抵の場合，さほど困難なしに行われる．

慣性テンソルが剛体軸の原点の選び方に関係するので，慣性モーメントもそれに従って原点の選び方に依存する．しかし，与えられた軸のまわりの慣性モーメントは，質量中心を通り，その軸に平行な軸のまわりの慣性モーメントと簡単な関係がある．与えられた原点 O から，質量中心に至るベクトルを $\mathbf{R}$ とし，O および質量中心から i 番目の質点に至る動径ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_i$ および $\mathbf{r}'_i$ としよう．このように定義された3つのベクトルの間には次の関係がある（図5−3参照）．

p.197

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i . \qquad (5-20)$$

それゆえ，軸 a のまわりの慣性モーメントは，

$$I_a = m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n})^2 = m_i[(\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times \mathbf{n}]^2 ,$$

あるいは，展開すると，

$$I_a = M(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 + m_i(\mathbf{r}'_i \times \mathbf{n})^2 + 2m_i(\mathbf{R} \times \mathbf{n})\cdot(\mathbf{r}'_i \times \mathbf{n}),$$

となる．ここで M は剛体の全質量である．右辺の最後の項は，次のように並べかえることができる．

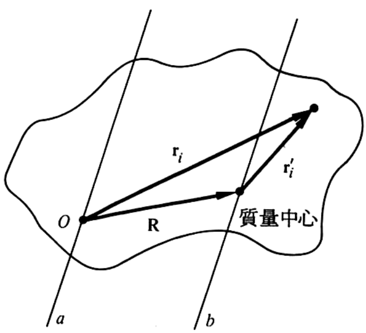


図5−3
平行軸のまわりの慣性モーメントの間の関係に含まれるベクトル．

$$-2(\mathbf{R}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{n}\times m_i\mathbf{r}_i').$$

質量中心の定義によって，和 $m_i\mathbf{r}_i'$ は零である．したがって，I_aは，質量中心を通って a に平行な軸 b のまわりの慣性モーメント I_b を用いて，次のように表わすことができる．

$$I_a = I_b + M(\mathbf{R}\times\mathbf{n})^2. \qquad (5-21)$$

$\mathbf{R}\times\mathbf{n}$ の大きさは，Oを通る軸と質量中心との垂直距離である．したがって，与えられた軸のまわりの慣性モーメントは，質量中心を通りそれに平行な軸のまわりの慣性モーメントと，その剛体の全質量が質量中心に集ったと考えたときの，初めの軸のまわりの慣性モーメントとの和に等しい．

同様な分解を慣性テンソルに対しても行うことができる．(5－20)式から，

$$r_i^2 = R^2 + r_i'^2 + 2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}_i',$$

となる．原点Oに関する慣性テンソルは，(5－15)式のダイアディックを用いると，

$$\mathsf{I} = MR^2\mathbf{1} + m_i[(r_i'^2 + 2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}_i')\mathbf{1} - (\mathbf{r}_i'\mathbf{r}_i' + \mathbf{R}\mathbf{r}_i' + \mathbf{r}_i'\mathbf{R})] - M\mathbf{R}\mathbf{R},$$

p.198
と書くことができる．$m_i\mathbf{r}_i'$ という形の和はすべて零となって，この式は次の形に帰着される．

$$\mathsf{I} = m_i(r_i'^2\mathbf{1} - \mathbf{r}_i'\mathbf{r}_i') + M(R^2\mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{R}). \qquad (5-22)$$

第1項は，質量中心に関する慣性テンソル I' であり，第2項は，質量中心におかれた質量Mの1個の質点のOに関する慣性テンソルである．このように，慣性モーメントおよび慣性テンソルは共に質量中心に関して分解されるが，その分解の仕方は，線運動量，角運動量および運動エネルギーに対して第1－2節で見出されたものと大変良く似ている．

5－4　慣性テンソルの固有値および主軸変換

上で行った議論によって，剛体の運動を論じる場合に，慣性テンソルが重要な役割を演じることがわかった．それゆえ，ここでこのテンソルとそれに結びつ

いた行列の性質を調べることはかなり興味のあることである．定義の式（5—7）から，慣性テンソルの成分は対称であること，すなわち，

$$I_{xy} = I_{yx},$$

であることがわかる．成分は実数であるから，このテンソルの行列はその随伴行列に等しいことになる（（4—38）式参照）．すなわち **I** は**自己随伴的**（*self-adjoint*），あるいは**エルミート的**（*hermitean*）である．このようなわけで，一般に慣性テンソルは9個の成分を持っているが，そのうち6個 ── 3個の対角要素と3個の非対角要素 ── だけが独立である．

慣性係数は剛体軸の原点の位置および3つの軸の剛体に対する方位に関係する．もちろん，もし与えられた原点に対して慣性テンソルが対角型になり，したがって慣性ダイアディックが，

$$\mathbf{I}' = I_1\mathbf{ii} + I_2\mathbf{jj} + I_3\mathbf{kk},$$

と書けるような特別な剛体軸の方向を見出すことができれば大変便利であろう．そのような軸に対しては，**L**の各成分は，次に示すように，**ω**のそれに対応する成分を含むだけである*.

$$L_1 = I_1\omega_1, \qquad L_2 = I_2\omega_2, \qquad L_3 = I_3\omega_3. \qquad (5-23)$$

運動エネルギーも同じように簡単な形になる．すなわち，

$$T = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}}{2} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2, \qquad (5-24)$$

となる．そのような軸を見出すことは常に可能であることを示すことができるが，その証明は本質的に，慣性テンソルのエルミート性に基づくものである．

p. 199
第4—6節で注意したように，行列の固有値方程式は，その行列を対角型に変換することによって解くことができ，その対角要素が求める固有値である．それゆえ，**I** が対角型になるような軸を求める問題は，行列 **I** に対する固有値問題と同等であって，I_1, I_2, I_3 が3つの固有値になる．そしてまた，**I** が対角型になるような座標系では，その軸の方向が固有ベクトルの方向に一致すると

*）後の応用を見込んで，これらの軸に関する成分を添字1, 2, 3で示すことにする．

いうことも導かれる．例えば$\boldsymbol{\omega}$が1つの軸，かりにx軸の方向を向いているとしよう．そうすると(5－23)式によって，角運動量$\mathbf{L}=\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}$も$x$軸方向を向いている．このように，3つの軸のどれかに平行な任意のベクトルに$\mathbf{I}$を作用させると，同じ方向の別のベクトルが得られる．したがってそのようなベクトルは，定義によって$\mathbf{I}$の1つの固有ベクトルでなければならない．

第4－6節では，任意の行列を対角型にし，その固有値を見出す方法のあらましを述べた．しかし，そこで述べた手続きだけでは，$\mathbf{I}$が対角型になるような**実の直交座標軸**が存在するということの証明にはなっていない．例えば直交行列に対しては，自明の場合を除いては，実の固有値はただ1つであり，それゆえ，この固有ベクトルに対応するただ1つの実の方向(すなわち回転軸の方向)しか存在しないということを思い起こそう．これに対して，われわれがここで証明しようとするのは，$\mathbf{I}$の**すべて**の固有値が実数であり，かつ実の方向をもつ3つの固有ベクトルが互いに直交するということである*.

いま，$\mathbf{R}_j$を$\mathbf{I}$のj番目の固有ベクトルとし，その固有値をI_jとしよう．そうすると，対応する固有値方程式は，

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{R}_j=I_j\mathbf{R}_j, \qquad (5-25)$$

となる†．もしも$\mathbf{R}_l$が同様にl番目の固有ベクトルを表わすものとすれば，(5－25)式の左から$\mathbf{R}_l^*$を掛けスカラー積を作ると，

$$\mathbf{R}_l^*\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{R}_j=I_j\mathbf{R}_l^*\cdot\mathbf{R}_j, \qquad (5-26)$$

となる．$\mathbf{R}_l$に対する固有値方程式の複素共役は，(5－25)式の形に従うと，

$$\mathbf{I}^*\cdot\mathbf{R}_l^*=I_l^*\mathbf{R}_l^*, \qquad (5-27)$$

となる．さて，ダイアッドとベクトルの積の順序は，正方行列と1列行列の積の場合と同じように，転置をとることによって入れ換えることができる．すなわち，形式的にいうと，$\mathbf{A}$を任意のダイアッドとし，$\mathbf{P}$を任意のベクトルとす

*) 相似変換によって$\mathbf{I}$を対角型にする行列$\mathbf{X}$を用いていえば，これらの条件は$\mathbf{X}$が**実の直交行列**でなければならないということである．すなわち，$\mathbf{X}$は1つの実の直交座標系を別の実の直交座標系に変換するということである．

†) なされている議論から明らかなことであるが，(5－25)式から(5－29)式までの式では添字jまたはlに関する和はとられない．

ると，これらの積の i 番目の成分は，

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{P})_i = A_{ik}P_k = P_k(\tilde{\mathbf{A}})_{ki} = (\mathbf{P}\cdot\tilde{\mathbf{A}})_i\ ,$$

となる．したがって（5－27）式は次のように書ける．

$$\mathbf{R}_l^*\cdot\mathbf{I}^\dagger = I_l^*\mathbf{R}_l^*. \qquad (5-27')$$

p.200
この結果に右から $\mathbf{R}_j$ を掛けてスカラー積をとると，

$$\mathbf{R}_l^*\cdot\mathbf{I}^\dagger\cdot\mathbf{R}_j = I_l^*\mathbf{R}_l^*\cdot\mathbf{R}_j\ , \qquad (5-28)$$

が得られる．$\mathbf{I}$ はエルミート的であるから，（5－26）式と（5－28）式の左辺は等しい．したがって，これら２つの式の差をとると，

$$(I_j - I_l^*)\mathbf{R}_l^*\cdot\mathbf{R}_j = 0\ , \qquad (5-29)$$

となる．もし l が j に等しければ，$\mathbf{R}_l^*\cdot\mathbf{R}_j = |\mathbf{R}_j|^2$ であって，これは正定符号である[1]．したがって，その場合に（5－29）式が零になるのは，$I_j = I_j^*$ であるときに限る．これで，求めている結果の１つが証明された．この証明では $\mathbf{I}$ のエルミート性だけしか用いていないことに注意しよう．したがって，**任意のエルミート行列の固有値は実数である．** $\mathbf{I}$ は実でもあるから，（5－25）式からわかるように，固有ベクトル $\mathbf{R}_j$ の方向余弦も同じように実数でなければならない．

もし，l を j と異なるように選び，その固有値がちがっているとすれば，（5－29）式が満足されるのは $\mathbf{R}_l\cdot\mathbf{R}_j$ が零になる場合に限られる．これで，固有ベクトルが直交するという第２の要求が証明された*．もし固有値のすべてが異なっていないときには，この直交性の証明はだめになってしまう．しかし，その場合でも有効であるように，上の証明を修正することはそれほどむずかしくはない．例えば，２つの固有値が等しい，すなわち $I_2 = I_3$ としよう．この場合，

1）任意のベクトル $\mathbf{R}$ に対して，$\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{R} \equiv |\mathbf{R}|^2 \geqq 0$ であって，等号が成立するのは $\mathbf{R} = 0$ のときに限る．これをスカラー積 $\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{R}$ の正定符号性という．

*）ここで与えた証明は，常微分方程式論における Sturm-Liouville 型の固有値問題の理論の場合と非常によく似ている．その場合には，エルミート型の微分演算子の固有値が実数であり，それに対応する解の固有関数が互いに直交することが示される．この類似は偶然のことではない．Sturm-Liouville 型の微分方程式で表わされる任意の与えられた問題に対応して，いつでも行列で表わされる量を作ることができるのである．このことがまさに，量子論における行列力学の形式と波動力学の形式との対応関係において見られる．たとえば，G. F. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*. 第9－2節を参照せよ．

この2重の固有値に対して，(5－25)式を満足する固有ベクトルを少なくとも1つ見出すことは常に可能である．(5－29)式によって，この固有ベクトルは異なった固有値 I_1 に対する固有ベクトルと直交する．したがって，単位ベクトル **i** と **j** が，上で見出された2つの固有ベクトルの方向を向いているように，右手系の直交座標系を見出すことができる．この座標系では $I_{12}=I_{13}=I_{21}=I_{23}=0$ となることが，固有ベクトルに対する方程式，

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{i}=I_1\mathbf{i},\qquad \mathbf{I}\cdot\mathbf{j}=I_2\mathbf{j},$$

から導かれる．ところが **I** の対称性は，このとき $I_{31}=I_{32}=0$ であることを意味している．すなわち，この座標系では慣性テンソルは対角型であり，**k** もまた固有値が I_2 である **I** の固有ベクトルである．これから直ちに，**j** と **k** とで定義される平面内にある任意のベクトルは，固有値 I_2 をもつ固有ベクトルであるということが導かれる†．同じように，もし3つの固有値がすべて等しいときには，空間のすべての方向のベクトルが固有ベクトルになる．しかし，このときには，**I** は初めから対角型になっているはずであるから，あらためて対角型にする必要はない．

p.201
　このように，行列代数の方法によって，剛体内の任意の点に対して，慣性テンソルが対角型になるような直交軸の1組を見出すことができることがわかる．この直交軸は**主軸**(*principal axes*)と呼ばれ，それに対応する対角要素 I_1, I_2, I_3 は**主慣性モーメント**(*principal moments of inertia*)として知られている．初めに剛体に固体された1つの座標軸が与えられると，それにある特定の直交変換を行うことによって，主軸に変換することができる．このような直交変換は**主軸変換**(*principal axis transformation*)として知られている．実際には，もちろん主慣性モーメントは **I** の固有値であるから，永年方程式の根として求められる．永年方程式に導かれる筋道を思い起こすために，

---

†) 直交していない固有ベクトルの組があるとき，この組から直交した固有ベクトルの組を作るための，より一般的かも知れないが，同等な手続きは，線型代数における Gram-Schmidt の直交化の方法である．例えば，J. A. Eisele and R. M. Mason, *Applied Matrix and Tensor Analysis* (Wiley-Interscience, N. Y. 1970), pp. 16－12，または，M. C. Pease, *Methods of Matrix Algebra* (Academic, N. Y. 1965), pp. 59－61を見よ．(331)ページ以下の規準振動を作るときの類似の議論に注意せよ．

$$(\mathbf{I} - I\mathbf{1})\cdot\mathbf{R} = 0, \qquad (5-30)$$

という形の固有値方程式（（5－25）式参照）は，固有ベクトルの成分に対する3元同次連立1次方程式になっていることに注意しよう．これらの方程式は，係数のつくる行列式が零になるとき，すなわち，

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{zx} \\ I_{xy} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{yz} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0, \qquad (5-31)$$

であるときに限り，互いに矛盾なく成立する．ここでは，$\mathbf{I}$ の対称性を陽に書き表わしておいた．（5－31）式は永年方程式であって，I について3次であり，その3つの根が求める主慣性モーメントである．これら3つの根のおのおのに対して，方程式（5－25）を解けば，対応する主軸の方向を得ることができる．剛体の力学において，容易に解くことのできる問題では，大抵の場合に視察によって主軸を決定することができる．例えば，われわれが取り扱わなければならない剛体は，ほとんど常にある軸のまわりの回転体の形をしたものであって，剛体に固定された座標系の原点はこの対称軸の上にとられる．そのときには，回転軸に垂直な方向はすべて同等であって，このことは永年方程式が2重根をもつことを示している．こういう場合には，対称軸と，対称軸に垂直な平面内の互いに直交する任意の2つの軸が主軸になる．

主慣性モーメントは負にはなり得ない．なぜなら，主軸系における対角成分として，それらは2乗の項の和の形になるからである．例えば I_{xx} は，

$$I_{xx} = m_i(y_i^2 + z_i^2),$$

によって与えられる（（5－6）式参照）．主慣性モーメントの1つが零になるためには，剛体のすべての点でその座標のうちの2つが零になっていなければならない．明らかに，そのためには，剛体のすべての点が，零である主慣性モーメントに対応する慣性主軸に沿って直線状に並んでいなければならない．この直線状の剛体に垂直な任意の2つの軸が他の慣性主軸である．実際この場合は，明らかに対称軸が原点を通るような剛体の極限の場合になっている．

主軸という概念には，幾何学的な考察からも到達することができる．歴史的には，最初このような角度から主軸という概念が取り上げられたのである．与 p. 202 えられた軸のまわりの慣性モーメントは，$I = \mathbf{n}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{n}$で定義されてきた。この軸の方向余弦を$\alpha, \beta, \gamma$としよう．したがって，

$$\mathbf{n} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k},$$

である．そうすると，Iは$\mathbf{I}$の対称性を陽に用いれば，次のように書くことができる．

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{yz}\beta\gamma + 2I_{zx}\gamma\alpha. \qquad (5-32)$$

ここで次の式，

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{I}}, \qquad (5-33)$$

によって１つのベクトル$\boldsymbol{\rho}$を定義しておくと便利である．$\boldsymbol{\rho}$の大きさは，この式からわかるように$\mathbf{n}$で与えられる方向を持つ軸のまわりの慣性モーメントに関係している．この新しいベクトルの成分を用いると，(５－32)式は次のような形になる．

$$1 = I_{xx}\rho_1^2 + I_{yy}\rho_2^2 + I_{zz}\rho_3^2 + 2I_{xy}\rho_1\rho_2 + 2I_{yz}\rho_2\rho_3 + 2I_{zx}\rho_3\rho_1. \qquad (5-34)$$

この式を，３つの変数ρ_1, ρ_2, ρ_3の関数と考えると，これはρ空間における１つの曲面の方程式である．特に，(５－34)式は，**慣性楕円体**(*inertia ellipsoid*)と呼ばれる楕円体の方程式である．よく知られているように，楕円体の方程式が標準型，すなわち，

$$1 = I_1\rho_1'^2 + I_2\rho_2'^2 + I_3\rho_3'^2, \qquad (5-35)$$

をとるような直交軸へ変換することは常に可能であって，このとき，新しい軸の方向が楕円体の主軸の方向になっている．ところが，(５－35)式は慣性テンソルが対角型になるような座標系における(５－34)式とちょうど同じ形をしている．したがって，慣性楕円体の方程式を標準形にするような座標変換は，まさに前に述べた主軸変換にほかならない．主慣性モーメントが慣性楕円体の主軸の長さを決定する．したがって，永年方程式の２つの根が等しいときには

慣性楕円体は2つの主軸の長さが等しくなるから，回転楕円体になる．もし3つの主慣性モーメントがすべて等しければ，慣性楕円体は球になる．

慣性モーメントと密接な関係のある量として，次の式

$$I = MR_0^2, \tag{5-36}$$

によって定義される回転半径（*radius of gyration*）R_0がある．この回転半径を用いれば，ベクトル$\boldsymbol{\rho}$は，

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{n}}{R_0\sqrt{M}},$$

と書くことができる．このように，慣性楕円体上の点に至る動径ベクトルは，そのベクトルの方向のまわりの回転半径に逆比例する．

慣性テンソル$\mathbf{I}$およびそれに関連したすべての量 — 主軸，主慣性モーメント，慣性楕円体等 — は剛体中に固定されたある特定の点に関するものであるにすぎない，ということをここで再び強調しておいた方が良いであろう．もし，p.203 その点を剛体中の他の点に移せば，すべての量は一般的には変化するはずである．このような立場からは，（5－22）式はその特定の点を質量中心から他の点へ移すときの効果を与えていると考えられる．質量中心における$\mathbf{I}'$を対角化するような主軸変換は，一般には差の項$M(R^2\mathbf{1} - \mathbf{RR})$を必ずしも対角化はしないであろう．したがって，この主軸変換は，移された点に関するテンソル$\mathbf{I}$に対する主軸変換には一般にはなっていない．移動を表わすベクトル$\mathbf{R}$が，質量中心に関する主軸の1つの方向を向いているときに限って，上の差を表わすテンソルは，変換された座標系で対角型になっている．そのような特別な場合には，新しい慣性テンソル$\mathbf{I}$は質量中心に関するものと同じ主軸をもっている．しかしながら，主慣性モーメントは移動方向の軸に関するものを除き変化する．移動する方向の軸に関しては，差を表わすテンソルの対角成分は明らかに零になっている．したがって，対角型の慣性テンソルに対する“平行軸”の定理はかなり特別な制限された形をもっている．

5—5　剛体の問題の解き方とEuler の運動方程式

いままで述べたことで，剛体の力学の問題を組み立て，それを解くために必要

な道具立は実際上すべてそろえられた．もしホロノミックでない拘束があれば，このような拘束の効果を運動方程式の中に含ませるために，特別な手段を用いなければならない．例えば“ころがりの拘束”(rolling constraints) があれば，これらを第２－４節で述べたように，Lagrangeの未定乗数法を用いて運動方程式の中に取り入れなければならない．第５－１節で述べたように，普通は剛体中に特別な点を見つけて，問題を純粋に並進の部分と，その点のまわりの純粋な回転の部分の２つに分離する．もし剛体の１点が，ある慣性系に関して固定されていれば，明らかにその点が特別な点になる．そのときには，その固定点のまわりの回転の問題だけを考えればよい．固定点を持たない剛体の場合には，特別な点としてもっとも有用なのは，必ずといって良い程，質量中心である．すでに見たように，全運動エネルギーおよび全角運動量は，質量中心の並進運動に関する項と，質量中心のまわりの回転運動に関する項とに分離する．したがって (１－31) 式は今では次のように書くことができる．

$$T = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 .$$

多くの問題に対して (ここで考察される問題はすべて確かにそうなっているが)，同じような分解が位置エネルギーについても行える．その場合には，質量中心の並進運動と質量中心のまわりの回転運動とを別々に解けばよいことになる．例えば，Newton の運動方程式を直接使うことができる．すなわち，質量中心の運動に対しては (１－22) 式を，質量中心のまわりの運動に対しては (１－26) 式を使えばよい．ホロノミックな保存系の場合には，Lagrange 形式による定式化が使える．その時のラグランジアンは次の形をとる．

$$L(q, \dot{q}) = L_c(q_c, \dot{q}_c) + L_b(q_b, \dot{q}_b).$$

p.204

ここで L_c はラグランジアンの中で質量中心の一般化座標 q_c (および一般化速度 $\dot{q}_c$) を含む部分であり，L_b は $q_b, \dot{q}_b$ で記述される質量中心のまわりの方位に関連する部分である．そのときには，実質的には問題はラグランジアン L_c で表わされる問題と，ラグランジアン L_b で表わされる問題との別々の２つの問題に分かれる．Newton形式の場合もLagrange形式の場合も，回転の運動エネルギーが (５－24) 式で与えられるような単純な形になるような，特定の点に関する

主軸を用いるのが便利である．これまでは，剛体の回転運動に対して唯一の適当な一般化座標は，Euler の角であった．もちろん，一平面内の剛体板の運動のように，運動が実際上２次元に制限されるような場合はしばしば起こる．その時には，回転軸はその平面に常に垂直で，１つの回転角だけが必要になる．それで，Euler の角というような面倒な道具立は，なしですますことができる．

固定点または質量中心のまわりの回転運動に対しては，Newton 形式から直接的に，Euler の運動方程式として知られている１組の方程式を導くことができる．その際には，剛体の固定点を原点とするような慣性系か，質量中心を原点とするような空間系を用いて考察する．これら２つの場合には，(１−26)式が成立するが，それはここでは簡単に，

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_s = \mathbf{N},$$

の形になる．添字 s が使われているのは，時間微分が剛体の回転と無関係な座標系に関するものであることを示すためである．しかしながら，(４−124)式を剛体に固定された座標系に関する導関数を得るために使うことができる．すなわち，

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L},$$

が成立する．または“剛体”を表わす添字を省略すると，次のようになる．

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}. \qquad (5-37)$$

したがって，(５−37)式は Newton の運動方程式を，剛体に固定された座標系において用いるときに適切な形になっている．(５−37)式の i 番目の成分は次のように書ける．

$$\frac{dL_i}{dt} + \epsilon_{ijk}\omega_j L_k = N_i. \qquad (5-38)$$

いま，もし剛体に固定された軸を，特定の点に関する主軸にとると，角運動量の成分は，$L_i = I_i\omega_i$ となる．このとき，主慣性モーメントはもちろん時間に依存しないから，(５−38)式は，

$$I_i\frac{d\omega_i}{dt}+\epsilon_{ijk}\omega_j\omega_k I_k=N_i \tag{5-39}$$

p.205
の形になる*. これを展開した形に書くと，(5－39)式を構成する3つの方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned}I_1\dot{\omega}_1-\omega_2\omega_3(I_2-I_3)&=N_1,\\ I_2\dot{\omega}_2-\omega_3\omega_1(I_3-I_1)&=N_2,\\ I_3\dot{\omega}_3-\omega_1\omega_2(I_1-I_2)&=N_3.\end{aligned} \tag{5-39'}$$

(5－39)式または(5－39′)式は固定点をもつ剛体に対するいわゆるEulerの運動方程式である. これらの方程式は，(1－53)式の形のLagrangeの運動方程式からも導くことができる. その場合には，一般化力 Q_j は回転を表わすEulerの角に対応するトルクである. しかしながら，Eulerの角に対応するトルクが剛体系の軸の方向を向いているのは1つだけで，他の2つのEulerの方程式はサイクリックな置換によって求めなければならない(演習問題8参照).

5－6 トルクが働かない場合の剛体の運動

Eulerの方程式を適用することのできる剛体の力学の問題の1つは，正味の力あるいはトルクを受けていない剛体の運動である. その際には，質量中心が静止しているかあるいは一様に運動しているかのいずれかであるから，質量中心が静止しているような座標系で回転運動を論じても解の一般性は失なわれない. そのような場合には，角運動量は，質量中心のまわりの回転運動から生じるものだけとなり，Eulerの方程式は全体の系に対する運動方程式となる. 正味のトルクのない場合には，Euler方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned}I_1\dot{\omega}_1&=\omega_2\omega_3(I_2-I_3),\\ I_2\dot{\omega}_2&=\omega_3\omega_1(I_3-I_1),\\ I_3\dot{\omega}_3&=\omega_1\omega_2(I_1-I_2).\end{aligned} \tag{5-40}$$

もちろん，1点が固定され，正味のトルクがないような剛体の運動も，これと

*) 明らかに(5－39)式は，ベクトル方程式の第 i 成分であって，i に関する和はとらない. ただし繰り返された添字 j と k に関しては和がとられる.

同じ方程式で記述されるであろう．このような場合には，運動エネルギーと全角運動量ベクトルは，いずれも時間的に不変でなければならないから，直ちに運動の２つの積分を知ることができる．これら２つの積分を用いれば，(５−40)式は楕円関数を用いて完全に積分することができるけれども，そのような取り扱いはあまり明快というわけにはいかない．しかし，問題の完全な解を求めなくても，Poinsotの作図法として知られている方法によって，すっきりした幾何学的な形で運動を記述することができる．

剛体の主軸の方向を軸とする座標系を考えよう．ただしその軸は，(５−33)式で定義されるような瞬間的な回転軸の方向のベクトル $\boldsymbol{\rho}$ の成分を測るものとする．p.206 われわれの目的のためには，運動エネルギー（ここでは一定）に対する(５−18)式を用いて，$\boldsymbol{\rho}$ を

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega\sqrt{I}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}}, \qquad (5-41)$$

の形に書いておくと便利である．この $\boldsymbol{\rho}$ 空間において，１つの関数，

$$F(\rho) = \boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\rho} = \rho_i^2 I_i, \qquad (5-42)$$

を定義しよう．ここで，Fが一定である面は楕円体であり，特に $F=1$ は慣性楕円体である．回転軸の方向が時間的に変わるにつれて，回転軸に平行なベクトル $\boldsymbol{\rho}$ もそれにつれて運動し，その先端は常に慣性楕円体上の点を定める．この点において計算されたFのグラジエント（勾配）は，その点における慣性楕円体面の法線方向を与える．$F(\rho)$に対する(５−42)式から，Fの ρ についてのグラジエントは，

$$\nabla_\rho F = 2\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\rho} = \frac{2\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}},$$

あるいは，

$$\nabla_\rho F = \sqrt{\frac{2}{T}}\mathbf{L}, \qquad (5-43)$$

という形に表わされる．このように，ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は常に，慣性楕円体面上のそれに対応する点における法線が角運動量の方向にあるように動く．いま論じている特別な場合には，$\mathbf{L}$の方向は空間に固定されている．したがって $\boldsymbol{\omega}$ と $\mathbf{L}$ が

この関係を保つためには，（剛体に固定された）慣性楕円体が空間の中で動きまわらねばならないことになる（第5−4図参照）．

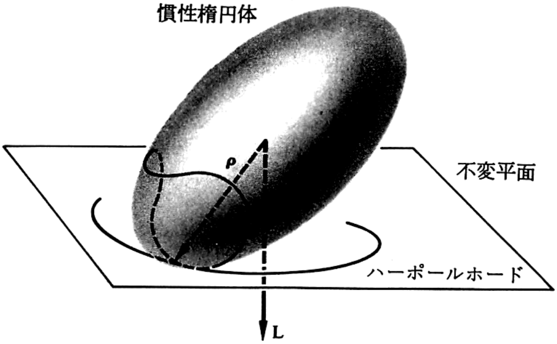


図5−4
不変平面に対する慣性楕円体の運動．

p.207
慣性楕円体の中心と，点 **ρ** におけるその楕円体面の接平面の間の距離も，時間的に一定でなければならないということも示すことができる．すなわち，この距離は **ρ** の **L** 上への射影に等しいから，

$$\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{L}}{L}=\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L}}{L\sqrt{2T}},$$

あるいは，

$$\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{L}}{L}=\frac{\sqrt{2T}}{L}, \qquad (5-44)$$

で与えられる．ここで（5−17）式を用いた．運動エネルギー T も，角運動量 **L** も運動の定数であるから，接平面は楕円体の中心から常に一定の距離にある．この平面の法線は **L** の方向にあって，空間的に定まった方向をもっているので，この接平面は**不変平面**（*invariable plane*）という名前で知られている．以上述べたことから，剛体の自由運動は，その慣性楕円体が，中心を不変平面からの高さを一定に保ったままで，この面上を滑らないでころがるようなものとして，心に描くことができる．ころがる際に滑らないのは，不変平面と楕円体との接点が **ρ** の位置によって決定され，その **ρ** が瞬間回転軸の方向にあるために，剛体内の瞬間的に静止している１つの方向になっているからである．接点が慣性楕円体の上に描く曲線は**ポールホード**（*polhode*）として知られている．ま

たそれが不変平面上に描く曲線は**ハーポールホード**（*herpolhode*）と呼ばれる[*]

Poinsotの幾何学的な議論は，トルクが働かない場合の剛体の運動を完全に記述するために極めて適切なものである．不変平面の方向と，その面から測った慣性楕円体の中心の高さとは，Tと$\mathbf{L}$の値によって決定されるが，この2つの量は，問題の初期条件によって定まっているものである．そうすると，ポールホードおよびハーポールホードを求めることは幾何学的な問題になる．空間における角速度の方向は$\boldsymbol{\rho}$の方向によって与えられ，一方剛体の瞬間的な方位は，剛体に固定されている慣性楕円体の方位によって与えられる．このようにして得られる，トルクが働かない場合の剛体の運動の詳しい記述は，文献の中にしばしば見出すことができる[†]　特別な場合として，剛体が対称軸を持っているときには，慣性楕円体は回転楕円体となるから，楕円体上のポールホードは明らかに対称軸のまわりの円になる．不変平面上のハーポールホードも同様に円になる．剛体に固定された観測者は，角運動量ベクトル$\boldsymbol{\omega}$が**物体円錐**（*body cone*）と呼ばれる円錐の上を動くのを見る．その円錐と慣性楕円体との交わりがポールホードである．それに対応して，空間に固定された観測者は，$\boldsymbol{\omega}$が**空間**
p.208
円錐（*space cone*）の面上を動くのを見る．その円錐と不変面との交わりがハーポールホードである．このようなわけで，対称軸のある剛体の自由運動は，物体円錐の空間円錐上のころがりとして記述されることがある．もし，対称軸のまわりの慣性モーメントが，他の2つの主軸のまわりの慣性モーメントよりも小さければ，その時には（5−35）式から，慣性楕円体は第5−4図に示されているものと幾分似た，扁長楕円体，すなわちラグビーの球のような形になる．この場合には，物体円錐が空間円錐の外側になる．対称軸のまわりの慣性モーメントの方が大きいときには，楕円体は扁平となり，物体円錐は空間円錐の内側をころがることになる．いずれの場合にも，この運動は，物理的には$\boldsymbol{\omega}$

---

*）このことを早口言葉的にいうと，次のような言いまわしになる：ポールホードは不変平面上のハーポールホードの上を滑らないでころがる．

†）特にWebster, *Dynamics of Particles and Rigid Bodies*; Macmillan, *Theoretical Mechanics —Dynamics of a Rigid Body*; Routh; *Advanced Rigid Dynamics* およびGray, *Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion* を見よ．奇妙なことに，これらの文献では，Poinsotの作図法の多くの性質の中で，ハーポールホードは，“蛇のような”という意味の名前に反して，常に原点に対して凹になっている．

の方向が，時間的に剛体の対称軸のまわりに**歳差運動をする**（*precess*）というように表わすことができる．

Poinsotの作図法では，**ω**がどのように運動するかはわかるが，ベクトル**L**が剛体系から見てどのように動いて見えるかについては何の情報も与えてはくれない．しかしながら，主軸系から見たときのベクトル**L**の道筋を記述する，別の幾何学的な方法が可能である．（5－23）式と（5－24）式から，この座標系では，運動エネルギーは角運動量の成分と，次の式で関係づけられていることがわかる．

$$T=\frac{L_1^2}{2I_1}+\frac{L_2^2}{2I_2}+\frac{L_3^2}{2I_3}. \qquad (5-45)$$

Tは運動の定数であるから，この関係式によって再び剛体に固定された楕円体が定義される*．ただし，この楕円体は慣性楕円体と同じでは**ない**。また同時に，角運動量の大きさが保存されることから，**L**は，

$$L^2=L_1^2+L_2^2+L_3^2 \qquad (5-46)$$

で定義される球上になければならない．運動エネルギーおよび角運動量についての，与えられた初期条件に対して，剛体系における**L**の道筋は，楕円体（5－45）と球（5－46）との交線によって与えられる．このような交線が常に存在するということを見るために，（5－45）式を和の規約を用いて次のように書き直そう．

$$1=\frac{L_i^2}{a_i^2}.$$

ここで，

$$a_i=\sqrt{2TI_i},$$

は楕円体の半軸である．これから，任意のjに対して，

$$a_j^2=L_i^2\frac{a_j^2}{a_i^2},$$

が導かれる．（5－46）式と比較すると，もしa_jが最も短い半軸ならば$a_j^2<L^2$であり，a_jが最も長い半軸ならば$a_j^2>L^2$であることがわかる．もし，簡単の

*）この楕円体は*Binet*の楕円体といわれることがある．

ために，半軸の長さが，

$$I_3 > I_2 > I_1,$$

p.209
の順序であるとすると，これらの不等式は次のようにまとめられる．すなわち，

$$\sqrt{2TI_1} < L < \sqrt{2TI_3},$$

となる．したがって，半径 L の角運動量の球は，運動エネルギーの楕円体と常に交わる．第5－5図は，運動エネルギーの楕円体と，その表面上のベクトル **L** の可能な道筋のいくつかの様子を示している．

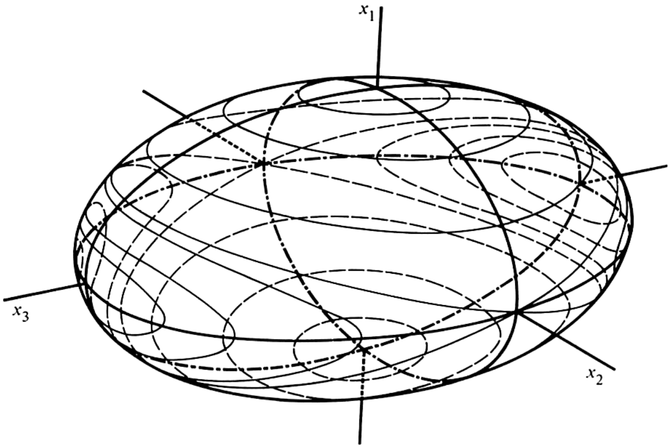


図5−5
剛体軸に固定された運動エネルギーの，すなわちBinetの楕円体と，その表面における **L** ベクトルのいくつかの可能な道筋

この幾何学的な作図法の助けを借りると，対称軸を持たない自由な剛体の可能な運動について，いくつかの結果を得ることができる．まず，そのような剛体の定常的な回転は主軸の１つのまわりのものだけが可能である，ということが容易にわかる．なぜなら，Eulerの方程式（５－40）から，$\boldsymbol{\omega}$ のすべての成分が定数となるのは，

$$\omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = 0,$$

が成立する場合に限られる．これから，成分 ω_i のうち少なくとも２つの成分が零となることが要求される．すなわち$\boldsymbol{\omega}$は主軸の１つの方向を向いていなければならない．しかしながら，これらの可能な運動はそのすべてが安定であるわけではない．ここで，安定であるとは，小さな摂動が加えられたときに，運動が主軸のまわりの回転から遠く離れてしまわないということである．例えば，第３軸のまわりの定常な運動は，$L^2=2TI_3$であるときに起こるであろう．この条件が少しだけ変わると，角運動量の球の半径はこの値よりほんの少し小さくなるだけで，運動エネルギーの楕円体との交線は，x_3軸のまわりの小さな円となる．したがって運動は安定である．すなわち，ベクトル$\mathbf{L}$は x_3軸から遠くへは離れない．同様に，これと反対の極限，すなわち最も小さい I の軸のまわりの運動が摂動を受けるときは，角運動量の球の半径は最も短い半軸よりほんの少し長くなる．
p.210
したがって再び交線は主軸のまわりの小さな閉じた図形となり，運動は安定である．しかしながら，中間の長さの軸のまわりの運動は**不安定**である．なぜなら，運動が僅かに変わっただけでも，球との交線は小さな閉じた曲線ではなく，楕円体面全体にわたるようなものになるからである．この振舞いは，中間の長さの軸のところでは，楕円体の曲率半径が１方向ではそれに接する球の半径よりも大きく，それに垂直な方向では小さいということを認めれば最もよく理解できる．他の２つの極限の場合には，曲率半径はすべての方向で球の半径よりも大きいか小さいかのいずれかである．剛体の自由運動についてのこれらの結論は，ずっと以前から知られていた．しかしこのことは最近，例えば回転する宇宙船の安定性に応用されて，剛体の力学についての古い論文の暗がりから引き出されてきた*．

---

*）散逸機構が存在する場合には，安定性の議論は修正されなければならない．Lが一定で，Tがゆっくりと減少しているような剛体の場合には，安定な回転は最大の慣性モーメントに対応するような主軸のまわりのものだけであるということは容易にわかる．一般に i 番目の主軸のまわりの回転の運動エネルギーは，与えられたLに対して $T=L^2/2I_i$ となるが，これは最大の I_i に対応する主軸の場合に最小になる．剛体が他の主軸のまわりに回転しているならば，運動エネルギーがゆっくりと減少しているということは，角速度ベクトルが移動して，回転が，与えられたLに対してTが最小となるような軸のまわりに行われるようになるという結果を生じる．このような散逸効果は宇宙船の場合に存在する．なぜなら，種々の部品，特にそれらが持っている長く張出した棒が宇宙船の飛行中に曲がるからである．これらの事実は，宇宙船の初期の設計者が苦労して学んだことである．

対称軸をもつ剛体の場合には，自由運動に対する解析的な解を求めることは困難ではない．そしてその解から，Poinsot の作図法によって予言される歳差運動を直接に確かめることができる．剛体の対称軸を主軸系の z 軸にとることにしよう．したがって，$I_1=I_2$ である．そうすると，Euler の方程式（5−40）は次のようになる．

$$I_1\dot{\omega}_1=(I_1-I_3)\omega_3\omega_2,$$
$$I_1\dot{\omega}_2=-(I_1-I_3)\omega_3\omega_1, \qquad (5-47)$$
$$I_3\dot{\omega}_3=0.$$

この最後の式から，ω_3 が一定であることがわかるから，これを，その問題についてわかっている初期条件の１つとして取り扱うことができる．これを用いると，残りの２つの方程式は，

$$\dot{\omega}_1=-\Omega\omega_2, \qquad \dot{\omega}_2=\Omega\omega_1, \qquad (5-48)$$

と書くことができる．ここで，Ω は次の式で与えられる角振動数である．

$$\Omega=\frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_3. \qquad (5-49)$$

（5−48）の２つの式から ω_2 を消去すると，単振動に対する標準的な微分方程式が得られる．すなわち，

$$\ddot{\omega}_1=-\Omega^2\omega_1,$$

となる．この方程式の典型的な解は，次の形をしている．

$$\omega_1=A\cos\Omega t.$$

これに対応する ω_2 の解は，この ω_1 の式を（5−48）式の第１式に代入して得ることができる．すなわち，

p. 211

$$\omega_2=A\sin\Omega t,$$

となる．ω_1 と ω_2 に対する解は，$\omega_1\mathbf{i}+\omega_2\mathbf{j}$ というベクトルは，その大きさを一定に保ちながら，角振動数 Ω で剛体の z 軸のまわりに一様に回転しているということを示している（図５−６参照）．それゆえ，全角速度 $\boldsymbol{\omega}$ も一定の大きさ

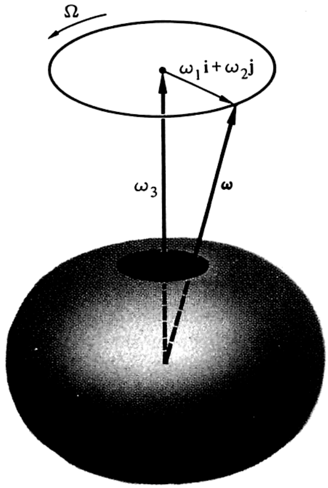


図 5−6
対称な剛体の自由運動における，対称軸のまわりの角速度の歳差運動.

を持ち，z 軸のまわりをPoinsotの作図法から予言されるのと正確に同じ振動数で歳差運動をする.* ここで述べた歳差運動は，剛体に固定された軸に相対的なものであって，この軸それ自身は，空間においてさらに大きな振動数 $\boldsymbol{\omega}$ で回転しているということを思い起こす必要がある.（5−49）式から，I_1 が I_3 に近ければ近いほど，歳差運動の振動数 Ω は回転の振動数 ω に比べて小さくなることがわかる．定数 A（歳差運動の振幅）および ω_3 は，もっと普通に用いられる運動の定数，すなわち運動エネルギーおよび角運動量の大きさを用いて表わすことができる．すなわち，T および L^2 は A と ω_3 の関数として次のように書き表わすことができる.

$$T=\frac{1}{2}I_1A^2+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2,$$

*）（5−49）式で与えられる大きさをもち，z 軸方向に沿うベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ を定義すれば，この歳差運動は別の方法で示すこともできる．このとき，（5−47）式は，本質的にはベクトル方程式，

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega},$$

と同等であって，この式から $\boldsymbol{\omega}$ が振動数 Ω で歳差運動をすることが直ちにわかる.

$$L^2 = I_1^2 A^2 + I_3^2 \omega_3^2.$$

したがって，これらの関係から逆に，A および ω_3 を，T および L の関数として求めることができる．

p.212
地球に作用する外力のトルクは十分弱いので，その自転(*rotational*)運動は自由運動と考えてよいから，地球の自転軸は上に述べた歳差運動を示すことが期待されるであろう．地球は極軸のまわりに対称であり，また極軸の方向に僅かに扁平であるから，I_1 は I_3 よりも小さい．数値的には，これらのモーメントの比は，

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} = 0.00327,$$

となるようなものである．したがって，歳差運動の角振動数の大きさは，

$$\Omega = \frac{\omega_3}{306},$$

であるはずである．ω_3 は実際的には $\boldsymbol{\omega}$ の大きさに等しいから，この結果は306日すなわち約10か月という周期の歳差運動があることを予言している．すなわち，もし何等かの事情で，自転軸が地球の図形上の軸からずれると，自転軸は，図形上の軸のまわりに（すなわち，北極のまわりに）10か月に1度の割合で歳差運動をすることが予想される．実際的には，このような運動は，地表の点の見かけの緯度の周期的な変化として現われるはずである．世界中に網の目のように分布した観測点で，緯度の注意深い観測が現在までに既に約100年間も続けられている．その結果，自転軸は確かに極のまわりに，振幅が緯度にして10分の数秒のオーダー（約10m）で動いていることがわかった．しかし，その様子は，上に述べた単純な分析から予想されるよりもはるかに複雑（かつ興味深いもの）である．図形上の軸と回転軸とのずれは，時間的に大変不規則に変わり，歳差運動というよりはむしろ，“ぶるぶるという震え”（wobble）といったものである．振動数の注意深い分析によって，運動には1年を周期とするものも存在することがわかった．それは1年間の季節の変化と，それに対応した地球のまわりの大気の質量分布の変化によって生じると考えられている．しかし，

それに加えて，Chandler震動（*Chandler wobble*）として知られている，周期が420日付近に集中した振動の強い成分がある．現在では，この運動は，上で導かれたような自由な剛体の歳差運動を表わすものであると信じられている．周期の差は，地球が剛体ではなく，ある程度の弾性をもっていることによって生じると考えられている．実際には，地球の一部が自転軸の移動についていくため，主慣性モーメントの差が小さくなり，したがって周期を増大させることになる（もし，例えば地球が完全流体であったとすれば，図形上の軸と自転軸とは直ちに調整されて一致し，歳差運動は生じ得ないであろう）．

その他にも，ぶるぶるとした震えについて，はっきりとわからないところがある．振動数解析によると，強い減衰効果が存在することが示され，それは潮汐による摩擦のためか，またはマントルと地核の間の相互作用による散逸効果によるものと信じられている．そうだとすると，減衰の期間は10～20年間のはずである．しかし，Chandlerの震動の振幅については，そのような減衰は観測されていない．したがって，この震動を続けさせるには何等かの不規則な励起が存在しなければならない．この励起については，種々の原因が考えられてきた．現在では，深い地震か，その源となるマントルの現象によって，自由な
p.213
剛体の歳差運動を励起するに十分な程大きな慣性テンソルの不連続な変化が生じるためではないかと考えられている*．

5－7　1点が固定された重い対称こま

剛体の力学のさらに進んだ複雑な応用の1例として，対称軸上の1点が空間に固定されている剛体の重力場の中での運動を考えよう．子供のおもちゃのこまから，ジャイロスコープを用いた（gyroscopic）複雑な航海用の器具に至る広い範囲の物理的な系は，近似的にそのような**重い対称こま**（*heavy symmetrical top*）と考えることができる．実際的な応用という面からも，また今まで

*）自由運動におけるこの地軸の歳差運動を，黄道の法線のまわりのゆっくりした歳差運動と混同してはいけない．後者の分点の**天文学的な歳差運動**は，太陽と月の引力のトルクによるものであり，それは上の議論では無視できるとした．分点の歳差運動の周期（26,000年）が，自由運動の歳差運動の約1年という周期にくらべて非常に長いということは，この仮定が正当であることを示している．天文学的歳差運動については後に論じる．

に展開してきたいろいろな方法を説明する例としても，重い対称なこまの運動は，くわしく調べる価値がある．

対称軸はもちろん主軸の1つであるが，それを剛体に固定された座標系の z 軸に選ぶことにしよう[†]．1点が固定されているのであるから，こまの配置はEulerの3つの角で完全に指定される．すなわち θ は z 軸の鉛直軸に対する傾きを与え，ϕ は鉛直軸のまわりの方位角，ψ はこまに固定された z 軸のまわりの回転角を表わす（図5－7参照）．固定点から重心（それは対称軸の上にある）までの距離を l としよう．

こまの運動に対する解を求めるためには，Eulerの方程式よりも，むしろラグランジアンを用いる方法が使われる．剛体は対称であるから，運動エネルギーは次のように書くことができる．

$$T=\frac{1}{2}I_1(\omega_1^2+\omega_2^2)+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2 .$$

あるいは，Eulerの角を用い，（4－125）式を利用すれば，

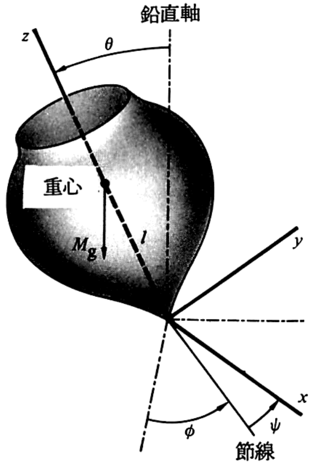


図5—7
対称こまの方位を指定するEulerの角.

†）ここでは，剛体に固定された座標系だけを特別に指定すればよい．したがって，それをこの節では便宜的に xyz 軸としても，それを空間軸と混同する恐れはないであろう．

$$T=\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2, \qquad (5-50)$$

と書くことができる．ここでω_1^2とω_2^2の中の$\dot{\theta}$と$\dot{\phi}$との積の項は互いに消し合う．一定の重力場の中では，位置エネルギーは，あたかも剛体がその質量中心に集中しているかのように考えた場合と同じになる，ということは良く知られた初等的な定理であるが，その形式的な証明をここで簡単にしておこう．剛体の位置エネルギーは，すべての質点についての和である．すなわち，

$$V=-m_i\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{g}.$$

p. 214
となる．ここで$\mathbf{g}$は重力の加速度を表わす一定のベクトルである．質量中心の定義の式（1－21）によって，この式は次の式と同値である．

$$V=-M\mathbf{R}\cdot\mathbf{g}, \qquad (5-51)$$

これで定理は証明された．Euler の角を用いると，

$$V=Mgl\cos\theta, \qquad (5-51')$$

となる．したがってラグランジアンは，次のようになる．

$$L=\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2-Mgl\cos\theta. \qquad (5-52)$$

ϕとψはラグランジアンの中に陽に現われていないことに気がつくであろう．それゆえ，それらはサイクリックな座標であって，そのおのおのに対応する一般化運動量は時間的に一定であることを示している．さて，すでに知っているように，回転角に共役な運動量は，その回転軸の方向における全角運動量の成分である．回転軸はϕに対しては鉛直軸であり，ψに対しては剛体系のz軸である．実際，初等的な原理からも，これらの方向における角運動量の成分は時間的に一定でなければならないことを示すことができる．すなわち，重力のトルクは節線の方向に沿っているから，このトルクは鉛直方向にも剛体系のz軸方向にも成分を持たない．それは，定義によってこの２つの軸はともに節線に垂直だからである．それゆえ，これら２つの軸の方向の角運動量の成分は，時間的に一定でなければならないのである．

したがって，運動の2つの第1積分が直ちに得られて，

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_3\omega_3 = I_1 a\,, \qquad (5-53)$$

p.215
および，

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot{\phi} + I_3\dot{\psi}\cos\theta = I_1 b, \qquad (5-54)$$

となる．ここで，運動の2つの定数を新しい定数 a, b を用いて表わした．さらに，もう1つの第1積分を用いることができる．すなわち，いま考えている系は保存系であるから，全エネルギー E は時間的に一定である．したがって，

$$E = T + V = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}\omega_3^2 + Mgl\cos\theta\,, \qquad (5-55)$$

がまた1つの積分になる．

問題を解くためには，もう3回だけ求積法を行えばよいのであるが，それは直接 Lagrange の方程式を用いなくても，ここに得られた3つの第1積分からたやすく求めることができる．まず（5−53）式から，$\dot{\psi}$ は $\dot{\phi}$ によって，

$$I_3\dot{\psi} = I_1 a - I_3\dot{\phi}\cos\theta, \qquad (5-56)$$

と表わされる．この結果を（5−54）式に代入して $\dot{\psi}$ を消去すると，

$$I_1\dot{\phi}\sin^2\theta + I_1 a\cos\theta = I_1 b\,,$$

あるいは，

$$\dot{\phi} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}\,, \qquad (5-57)$$

が得られる．このようにして，もし θ が時間の関数としてわかれば，（5−57）式を積分して ϕ を時間の関数として与えることができる．（5−57）式を逆に（5−56）式に代入すると $\dot{\psi}$ に対する式，

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos\theta\,\frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}\,, \qquad (5-58)$$

が得られ，もし θ がわかっていれば，これから ψ が与えられる．最後に，（5−57）式と（5−58）式を用いて，エネルギー方程式から $\dot{\phi}$，$\dot{\psi}$ を消去することができて，θ だけを含む微分方程式が得られる．まず，（5−53）式は ω_3 が時

間的に一定であって，$(I_1/I_3)a$ に等しいことを示していることに注意しよう．したがって，$E - I_3\omega_3^2/2$ は運動の定数である．それを E' と書くことにしよう．(5−57)式を利用すると，エネルギー方程式は次の形に書くことができる．

$$E' = \frac{I_1\dot{\theta}^2}{2} + \frac{I_1}{2}\frac{(b - a\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta. \qquad (5-59)$$

(5−59)式は，変数 θ に関する有効ポテンシャル $V'(\theta)$ が，

$$V'(\theta) = Mgl\cos\theta + \frac{I_1}{2}\left(\frac{b - a\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2, \qquad (5-60)$$

で与えられるような1次元問題と等価な形をしている．実際，θ についての運動を議論するときには，この1次元問題にしたものを扱う．それは，中心力の問題において動径方向の運動を記述する際に，第3−3節で行ったことと非常
p.216
によく似ている．しかしながら，変数を $u = \cos\theta$ に変換すると，さらに幾分か都合がよい．このときには(5−59)式は次のように書き直せる．

$$E'(1 - u^2) = \frac{I_1}{2}\dot{u}^2 + \frac{I_1}{2}(b - au)^2 + Mgl\,u(1 - u^2).$$

2つの新しい定数を，

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1}, \qquad \beta = \frac{2Mgl}{I_1}, \qquad (5-61)$$

によって導入し，項を並べ変えると，上の式は次のようになる．

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2. \qquad (5-62)$$

これは直ちに求積法の形にすることができて，

$$t = \int_{u(o)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}}, \qquad (5-63)$$

となる．この結果と，(5−57)および(5−58)式を用いれば，ϕ と ψ も求積法の形に書くことができる．しかしながら，(5−63)式の平方根の中の多項式は u について3次式であるから楕円積分[1]を取り扱わなければならないことになる．楕円関数を含むこれらの解のくわしい議論は文献の中に求めることがで

1) 楕円積分の定義については115ページの脚註を見よ．

きるが,* この場合にも自由運動の場合と同じように，その議論の物理的な内容は数式の洪水の中に見失なわれ勝ちになる．しかし幸いなことに，運動の一般的な性質は，実際に積分を行わなくても知ることができる．

（5−62）式の右辺を$f(u)$と書くことにしよう．この3次式の根は，$\dot{\theta}$の符号が変わる角，すなわちθの“回帰角”(turning angle)を与える．uの大きい値に対しては$f(u)$の値を決める主な項はβu^3である．βは常に零より大きいから((5−61)式を見よ)，$f(u)$はuの大きな正の値に対しては正であり，大きい負の値に対しては負である．$u=\pm 1$の点では$f(u)$は$-(b\mp a)^2$に等しく常に負である．ただし$u=\pm 1$が$f(u)$の根である特別の場合は除く（これはこまが鉛直に立っている場合に対応する）．したがって，少なくとも1つの根は$u>1$の領域になければならないことになるが，この領域は実数の角には対応しない．実際，こまの物理的な運動は$u=-1$と$u=+1$の間，すなわち$\theta=0$と$\theta=\pi$の間の区間のどこかで$\dot{u}^2$が正であるときにだけ起こりうるのである．それゆえ，実際のこまに対しては，いつでも$f(u)$は-1と$+1$の間に2つの根をもち（図5−8を見よ），$\cos\theta$が常にこの2つの根の間にあるように運動すると結論しなければならない．これら2つの根の位置，およびそれらの間のθの値に対応する$\dot{\phi}$と$\dot{\psi}$の振舞いから，こまの運動についての多くの定性的な知識が得られる．

こまの運動は，その対称軸が固定点を中心とする単位球面と交わる点の描く曲線の形を追跡することによって記述されるのが普通である．この曲線は，対

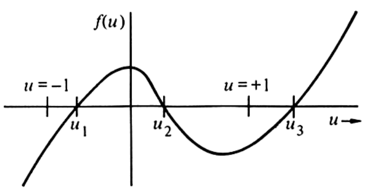


図5−8
重い対称こまの運動におけるθの回帰角の位置を示す．

*）例えば，すでに引用したF. Klein and A. Sommerfeldの書物，Whittakerの書物*Analytical Dynamics*，あるいはもっと詳しい取り扱いについてはMacmillan，*Dynamics of Rigid Bodies*を見よ．

p.217
称軸の軌跡(*locus*)として知られている．軌跡の上の点の極座標は，剛体系に対するEulerの角 θ, ϕ にほかならない．上で行った議論から，この軌跡は余緯度が $\theta_1 = \arccos u_1$ と $\theta_2 = \arccos u_2$ の２つの円を境とする領域の中にあって，この２つの円の上では $\dot{\theta}$ が零になることがわかる．軌跡曲線の形は大体において $b - au$ の根の値によって決まる．この根を u' と書こう．すなわち，

$$u' = \frac{b}{a}, \tag{5-64}$$

である．例えば u' が u_2 より大きいように初期条件が与えられたとしよう．その際には，(5－57) 式によって，$\dot{\phi}$ は θ_1 と θ_2 の間の許された傾きの角に対して常に同じ符号をもつ．それゆえ，対称軸の軌跡は，図５－９(a)に示すように，θ_1，θ_2 のいずれの円の上でも $\dot{\phi}$ が同じ方向にあるような仕方で境界の円に接しなければならない．したがって ϕ は１つの方向，あるいはそれと反対の方向にいつまでも増加しつづけるから，こまの軸は鉛直軸のまわりに**歳差運動をする**といってよいであろう．しかし，これは自由運動のときに出会ったような正常な歳差運動 (regular precession) ではない．なぜなら，対称軸は境界の角 θ_1，θ_2 の間をおじぎをしながらまわっていくからである．──こまは歳差運動しながら**章動する** (*nutate*) のである．

b/a すなわち u' の値が u_1 と u_2 の間にあるときには，歳差運動の方向は２つの境界の円の上で異なり，剛体の対称軸の軌跡には図５－９(b)に示すようなループができる．しかしこの場合，$\dot{\phi}$ の平均値は零にならないから，１方向あるいはそれと反対方向の正味の歳差運動がやはり存在する．また，u' が $f(u)$ の根
p.218
の１つに一致する場合も起こり得る．そのときには，その根に対応する境界の円の上では $\dot{\theta}$ も $\dot{\phi}$ も零にならなければならない．このことから，軌跡は図５－９(c)に示すように，その円に接する先点 (cusp) をもたなければならないことがわかる．

この最後の場合は，それほど例外的なものではない．普通にこまの初等的な議論で取り扱う初期条件は，事実この場合に対応しているのである．すなわち，その場合には，こまは最初その対称軸のまわりに回転しており，その軸はある定まった方向 θ_0 に固定されていると仮定する．そして，時刻 $t = 0$ において軸

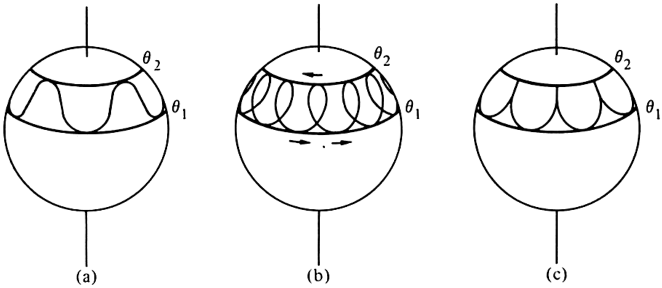


図5−9
単位球面上の対称軸の軌跡の可能な形.

が放されて，その後の運動を求めるのである．この際の初期条件をはっきりと書き表わせば，$t=0$ において $\theta=\theta_0$ および $\dot{\theta}=\dot{\phi}=0$ ということになる．それゆえ，角 θ_0 は $f(u)$ の根の１つでなければならない．実際この角は上の方の円に対応する．すなわち，

$$u_0 = u_2 = u' = \frac{b}{a}, \qquad (5-65)$$

である．このことを示すために，上記の初期条件の場合には，E' は $Mgl\cos\theta_0$ に等しく，E' の中の運動エネルギーの項は負にはなり得ない，ということに注意しよう．そうすると，$\dot{\theta}$ と $\dot{\phi}$ がその初期値から変化し始めるときに，全エネルギーが保存されるのは，位置エネルギーが減少する場合，すなわち θ が増す場合に限ることがわかる．それゆえ，初期値 θ_0 は θ のとりうる最小値，すなわち θ_2 に等しい．このような放し方をするときには，**こまは常に下の方に向って傾き始める．**そして歳差運動を行いながら，もう１つの境界の円 θ_1 に達するまで傾きつづける．それから軸はふたたび上り始めて，θ_2 に達する．この運動全体の様子は図５−９(c)に示す通りである．

このように $t=0$ で $\dot{\theta}, \dot{\phi}$ がいずれも零であるという初期条件の下におけるこまの運動については，もし初めの回転運動のエネルギーが位置エネルギーの最大の変化に比べて大きければ，すなわち，

$$\frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \gg 2Mgl, \qquad (5-66)$$

であれば，いくつかの定量的な予言をすることができる．この場合には，こまの対称軸のまわりの回転が主な運動であって，重力のトルクの影響，すなわち歳差運動とそれにともなう章動は，単に小さい摂動と考えてよいであろう．このような状態にあるこまは“速く回っているこま”(fast top)といわれる．この仮定の下では，章動の範囲，章動の振動数，および歳差運動の平均振動数に対する表式を得ることができる．

このような初期条件の下では，章動の範囲は$u_1 - u_0$によって与えられる．ただし，u_1は$f(u)$のもう1つの物理的な根である．$E' = Mgl\cos\theta_0$という初期条件は，

$$\alpha = \beta u_0 ,$$

という等式と同値である．この関係と(5－65)式の条件を用いると，$f(u)$はもっと簡単に，

$$f(u) = (u_0 - u)\{\beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u)\} , \qquad (5-67)$$

の形に書き換えることができる．u_0と異なる$f(u)$の他の根は，{ }の中の2次式の根によって与えられる．それゆえ，求める根u_1は

$$(1 - u_1^2) - \frac{a^2}{\beta}(u_0 - u_1) = 0 , \qquad (5-68)$$

p.219
を満足しなければならない．$u_0 - u_1 = x_1$とおけば，(5－68)式は次のように書き直すことができる．

$$x_1^2 + px_1 - q = 0 . \qquad (5-69)$$

ここで，

$$p = \frac{a^2}{\beta} - 2\cos\theta_0 , \quad q = \sin^2\theta_0 ,$$

である．“速い”こまの仮定(5－66)式は，pの方がqよりもずっと大きいことを意味している．このことは比a^2/βを次のように書いて見ればわかる．

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{I_3}{I_1}\right)\frac{I_3\omega_3^2}{2Mgl} .$$

$I_3 \ll I_1$という場合(これは葉巻のような普通ではない形のこまに対応してい

る）を除いて，この比は1よりもずっと大きいから，$p \gg q$となる．したがって，小さな量q/pの1次まで考えると，（5−69）式の物理的に実現可能な根は，

$$x_1 = \frac{q}{p},$$

だけである．$2\cos\theta_0$をa^2/βに比べて無視すると，この結果は次のように書くことができる．

$$x_1 = \frac{\beta \sin^2\theta_0}{a^2} = \frac{I_1}{I_3}\frac{2Mgl}{I_3\omega_3^2}\sin^2\theta_0. \qquad (5-70)$$

こういうわけで，章動の範囲は$x_1 = u_0 - u_1$で測れば$1/\omega_3^2$に比例して小さくなる．すなわち，こまが速くまわっている程章動は小さい．

章動の振動数も同じように，“速くまわっている”こまに対しては容易に見出すことができる．この場合の章動は小さいから，（5−67）式の中の$(1-u^2)$の項はその初期値$\sin^2\theta_0$で置き換えることができる．そうすると，（5−67）式は（5−70）式を用い，かつ$u_0 - u = x$とおけば，

$$f(u) = \dot{x}^2 = a^2 x(x_1 - x),$$

となる．もし，変数変換，

$$y = x - \frac{x_1}{2},$$

によって，xの原点をその領域の中点に移すと，微分方程式は次のようになる．

$$\dot{y}^2 = a^2\left(\frac{x_1^2}{4} - y^2\right).$$

この微分方程式をもう一度微分すると，よく知られた調和振動の方程式，

$$\ddot{y} = -a^2 y,$$

となる．$t=0$において$x=0$という初期条件を考慮すると，解は，

$$x = \frac{x_1}{2}(1 - \cos at), \qquad (5-71)$$

p.220

となる．ここでx_1は（5−70）式で与えられる．それゆえ，θ_0とθ_1の間における対称軸の章動の角振動数は，

$$a = \frac{I_3}{I_1}\omega_3 , \qquad (5-72)$$

であって，こまが初めに速くまわっている程大きい．

最後に，歳差運動の角速度は，（5－57）式から，

$$\dot{\phi} = \frac{a(u_0 - u)}{\sin^2 \theta} \approx \frac{ax}{\sin^2 \theta_0} ,$$

で与えられる．あるいは，（5－72）式および（5－70）式を代入すれば，

$$\dot{\phi} = \frac{\beta}{2a}(1 - \cos at), \qquad (5-73)$$

となる．したがって，歳差運動の速さは一様ではなく，章動と同じ振動数で時間とともに三角関数的に変化する．しかし，歳差運動の平均振動数は，

$$\bar{\dot{\phi}} = \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{I_3\omega_3} \qquad (5-74)$$

である．この式は，こまの初めの回転速度が増加すると，歳差運動の速さが減少することを示している．

さて，これで対称軸の初速度が零である場合の，速い対称こまの運動を完全に描き出すことができる．こまの軸は，それを放した直後には，重力の影響を受けて下向きに動く．しかし軸が下がって行くにつれて，こまはその下降の度合(x)に比例する歳差運動の速度を得て，軸は鉛直軸のまわりに横向きの運動を始める．軸の初めの下降が，歳差運動につけ加わる周期的な章動になるのである．こまの最初の回転が速ければ速いほど，章動の振動数は大きくなるが，その範囲は（$1/\omega_3^2$ に比例して）急激に小さくなる．一方，鉛直軸のまわりの歳差運動は，速くまわっている程遅い．実際には，十分速いこまに対しては，支点での摩擦のために，章動は減衰してしまって，観測できなくなる．そのときには，こまは鉛直軸のまわりに一様な歳差運動をするように見える．この歳差運動は，見かけの上だけで正常（regular）なので，KleinとSommerfeldはそれを擬正常（*pseudoregular*）歳差運動と名づけた．歳差運動の初等的な議論では，多くの場合章動の現象は無視される．そのような導き方では，軸を放すとこまは直ちに一様な歳差運動を始める，という逆説的な結論が導かれるよう

に見える．すなわち軸は，歳差運動を引き起こす究極の原因である重力の方向と直角の方向に動くように見える．上に述べた擬正常な歳差運動の議論を用いれば，この逆説は解決される．すなわち，歳差運動は軸が静止している状態から連続的に生じてくるのであって，無限大の加速度が現われるわけではない．こまは軸を放した直後には重力の方向に動こうとする傾向をもっているのである．

p. 221
どのような条件の下でこまが本当に正常な歳差運動をするかということを正確に決定することは興味のある問題である．この場合には，角 θ はその初期値 θ_0 のところで一定の値を持ちつづける．これは $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$，いいかえると $f(u)$ が u_0 を２重根として持っていなければならないことを意味する（図５－10参照）．すなわち，

$$f(u) = 0, \qquad \frac{df}{du} = 0; \qquad u = u_0\ ,$$

でなければならない．この第１式は，（５－62）式から，

$$(\alpha - \beta u_0) = \frac{(b - au_0)^2}{1 - u_0^2}\ , \tag{5-75}$$

となり，第２式は，

$$\frac{\beta}{2} = \frac{a(b - au_0)}{1 - u_0^2} - u_0 \frac{(\alpha - \beta u_0)}{1 - u_0^2}\ , \tag{5-76}$$

と書ける．（５－75）式を（５－76）式に代入して，$\dot{\phi}$ に対する（５－57）式を用いると，$\dot{\phi}$ に対する２次方程式が得られる．すなわち，

$$\frac{\beta}{2} = a\dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \cos\theta_0\ , \tag{5-76'}$$

となる．β の定義の式（５－61）式および a の定義の式（５－53）式を用いると，a を ω_3 を用いて表わすか，または（一定な）$\dot{\psi}$ と $\dot{\phi}$ とを用いて表わすかのいずれかによって，上の式は２つの形に書くことができる．すなわち，

$$Mgl = \dot{\phi}(I_3\omega_3 - I_1\dot{\phi}\cos\theta_0)\ , \tag{5-77a}$$

あるいは，

$$Mgl = \dot{\phi}(I_3\dot{\psi} - (I_1 - I_3)\dot{\phi}\cos\theta_0)\ , \tag{5-77b}$$

となる．重いこまの問題に対する初期条件としては，$t=0$ における $\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}$, $\dot{\phi}$および $\dot{\psi}$ またはω_3のいずれかの６個の値を指定しなければならない． ϕとψ はサイクリックな座標であるから，それらの初期値は今考えている問題に対しては無関係であって，一般に４つの他のおのおのに対して任意の値を選ぶことができる．しかし，もし対称軸の運動が，章動のない一様な歳差運動であると

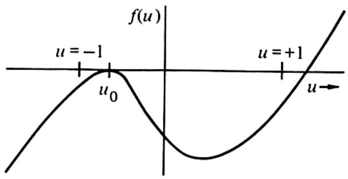


図 5－10
正常な歳差運動に対する $f(u)$の形.

いう要求をつけ加えると，これら４個の初期値はもはや完全に自由に選ぶことはできなくなり，(５－77)の２つの式のいずれかが満たされるようにしなければならない． $\dot{\theta}=0$ の場合には，θ および ω_3の初期値はそれでもまだ，ほと
p.222
んど任意に選ぶことができる．しかし，これらの値を定めれば，$\dot{\phi}$ の値は決まってしまう．“ほとんど任意に”という言葉を使ったのは，(５－77)式が２次式であって，$\dot{\phi}$が実であるためには，その判別式(５－77 a)が正，すなわち，

$$I_3^2\omega_3^2 > 4MglI\cos\theta_0 \,, \qquad (5-78)$$

でなければならないためである． $\theta_0 > \pi/2$のとき(こまはその質量中心が固定点よりも下になっている)，どのようなω_3の値に対しても一様な歳差運動が可能である．しかし，$\theta_0 < \pi/2$のとき，一様な歳差運動を行わせるためには，ω_3 はある最小値よりも大きくとられなければならない．すなわち，

$$\omega_3 > \omega_3' = \frac{2}{I_3}\sqrt{Mgl\cos\theta_0} \,, \qquad (5-79)$$

となっていなければならない． $\dot{\psi}$の可能な値に対しても，(５－77b)式から同様な条件が得られる．(５－77)式が２次式である結果として，一般に $\dot{\phi}$ に対して２つの解がある．これらは“速い”歳差運動，および“遅い”歳差運動とし

て知られている．また，（5−77）式は，有限の $\dot{\psi}$ あるいは ω_3 に対しては $\dot{\phi}=0$ という解を持たないことに注意しよう．すなわち，一様な歳差運動を行わせるためには，常にその歳差運動の方向に押しやらなければならない．こうして，（5−77）式から決められる正しい歳差運動の初速度を与えない限り，せいぜい擬正常な歳差運動しか起こさせることはできないのである．

歳差運動が遅いときには，a にくらべて $\dot{\phi}\cos\theta_0$ は省略することができる．そのときには，$\dot{\phi}$ に対する近似的な解は，

$$\dot{\phi} \approx \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{I_3\omega_3} \qquad (\text{遅い}),$$

となる．これは，速くまわっているこまに対する擬正常な歳差運動の平均角速度と一致しているが，この結果はもちろん予期されることである．それと，もし歳差運動が遅いときには，ジャイロスコープを軽く押してやる場合と，少しも押してやらない場合との差が殆どないからである．$\dot{\phi}$ に対するこの値を求めるときに，a に比べて $\dot{\phi}\cos\theta_0$ を省略したことは，ω_3 が可能な値の範囲で最小値に比べてずっと大きな値であるとしたことと同値である．ところで，そのような大きな ω_3 の値に対しては，“速い”歳差運動は，$\dot{\phi}$ が非常に大きいので，（5−77a）式において Mgl が他の項に比べて小さいという場合に得られる．したがって，

$$\dot{\phi} = \frac{I_3\omega_3}{I_1\cos\theta_0} \qquad (\text{速い}),$$

となる．このように，速い歳差運動は重力のトルクには関係せず，実際上自由な剛体の歳差運動と関係がある（演習問題19aを見よ）．

さらに注意しておく価値のある場合がもう1つある．それは $u=1$ が $f(u)$ の1つの根になっている場合である*．その例として，こまが初め，その軸を鉛直にしてまわされた場合を考えよう．その際には，明らかに $b=a$ である．なぜなら，I_1b と I_1a は，それぞれ鉛直軸およびこまの対称軸に沿う角運動量の成分であって，一定の値を持っているが，この場合にはこれらの軸が初めに一致し

*）この場合は特別な取り扱いをしなければならないことに注意しよう．なぜならば，これまでの議論では $\sin^2\theta$ という因子は，くりかえしくくり出されてそれで割算されていたからである．

p.223
ているからである．角速度は最初こまの対称軸のまわりにだけしかないから，$t=0$ におけるエネルギー方程式（5−59）は次のようになる．

$$E' = E - \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = Mgl.$$

α および β の定義（（5−61）式）によって，上の式から $\alpha=\beta$ が導かれる．

したがって，任意の角におけるエネルギー方程式は，

$$\dot{u}^2 = (1-u^2)\beta(1-u) - a^2(1-u)^2,$$

あるいは，

$$\dot{u}^2 = (1-u)^2\{\beta(1+u) - a^2\},$$

と書くことができる．この方程式の形から，$u=1$ が常に2重根になっていることがわかる．第3の根は，

$$u_3 = \frac{a^2}{\beta} - 1,$$

で与えられる．もし $a^2/\beta > 2$ であれば（これは“速くまわっている”こまに対応する），u_3 は1より大きいから，可能な運動は $u=1$ に対するものだけである．このときには，こまは単に鉛直軸のまわりに回転しつづける．このような状態に対しては，$f(u)$ のグラフは図5−11(a)のような形になる．他方，もし $a^2/\beta < 2$ であれば，u_3 は1よりも小さく，$f(u)$ は図5−11(b)のような形になって，こまは $\theta=0$ と $\theta=\theta_3$ の間で章動を行う．このように1つの限界角速度があって，それより大きい角速度に対しては，鉛直軸のまわりの自転だけが可能

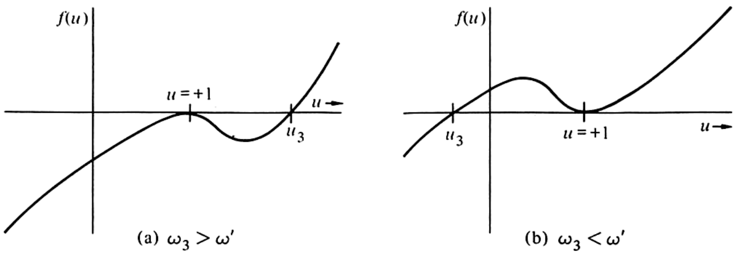


図5−11
対称軸が最初鉛直であるときの $f(u)$ のグラフ．

である．このω'の値は，

$$\frac{a^2}{\beta}=\left(\frac{I_3}{I_1}\right)\frac{I_3\omega'^2}{2Mgl}=2,$$

あるいは，

$$\omega'^2=4\frac{MglI_1}{I_3^2}, \tag{5-80}$$

p. 224

で与えられる．この値は$\theta_0=0$の場合に一様な歳差運動が可能であるための最小の角速度（5−79）式と一致している．実際の場合には，もしこまがその軸を鉛直にして，そのまわりに限界角速度ω'よりも大きい角速度ω_3でまわされると，それはしばらくの間は静かに鉛直軸のまわりにまわりつづける（それゆえ，この状態は“ねむり”ごまと呼ばれる）.* しかし，摩擦のために，回転の振動数はだんだん減って行き，ついに限界値よりも小さくなる．そうするとこまはよろめき始め，回転が遅くなるにつれてよろめきはますます大きくなる．摩擦の影響は（もちろん直接にはラグランジアン形式に含ませることはできないけれども）こまの振舞いに予想できないような現象を引き起こす．有名な例は“逆立ちこま”である．それは，基本的には球の半分よりやや大き目のものの平らな面に棒を付けたものである．球面を下にして硬い面上で回転させると，それは横向きにまわりはじめ，章動が始まる．そしてついには逆立ちして棒を軸として回転するが，これはあたかも“ねむり”ごまのように見える．角運動量ベクトルが完全に逆向きになるのは，こまが球面で横向きにまわっているときに生じる摩擦力のトルクの結果である.†

大規模な，影響力のある技術が，速く自転している剛体の応用，特に“ジャイロスコープ”と呼ばれるものの使用を基にしてつくられている．基本的には，

---

*) あたかも次の詩にあるように．

“…… われわれはとうとうたどりついた，最後に，そして最もよいことに，
目まいのするような，ぐるぐる回る円の中の広い場所から，
自転している世界が，その軸の上でやすらいでいる，静止した中心へ，
やっとたどりついて，心は憩う.”

D. L. Sayers の“けばけばしい夜”(*Gaudy Night*)から．
（Harper and Row社の許可を得て転載）

†) 1950年代には“逆立ちこま”が大流行し，おびただしい量の文献が書かれた．例えば，A. R. Del Campo, *American Journal of Physics* **23**, 544(1955)，またBarger and Olsson, *Classical Mechanics*, pp. 254−257を見よ．

ジャイロスコープは，外部からの手段で，対称軸のまわりに非常に速くまわされている対称なこまであって，その対称軸の運動は1つまたはそれ以上の空間軸のまわりに制限なく行われるが，質量中心は静止しているように複吊り装置(gimbal)に支持されるようになっている．もしジャイロスコープに，適当な外力のトルクが作用すると，それは上で重いこまについて述べたような歳差運動や章動を行う．しかしながら，“速い”こまである条件は十分に満たされているので，章動の範囲は常に大変小さい．さらに，それの支持され方によって，章動はゆっくりと減衰する．したがってジャイロスコープの現象として観察されるのは歳差運動だけとなり，この歳差運動を記述するために必要な数学的扱いは大いに簡単化される．その記述の仕方は，重い対称こまの場合を一般化すればよいことが以下のようにしてわかる．いま$\mathbf{R}$を固定点から重心に向かう対称軸に沿った動径ベクトルとする．このとき，こまに作用する重力のトルクは，

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \times M\mathbf{g}, \tag{5-81}$$

となる．ここで$\mathbf{g}$は重力の加速度を表わす下向きのベクトルである．$\mathbf{L}_3$を対称軸のまわりの角運動量を表わす，対称軸に沿ったベクトルとし，$\boldsymbol{\omega}_p$を歳差ベクトル(precession vector)として知られている，鉛直方向を向いた，(5－74)
p.225
式で与えられる歳差運動の平均角速度$\dot{\phi}$に等しい大きさを持つベクトルとする．このときには，(擬正常な)歳差運動の向きと大きさは次の式で与えられる．

$$\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L}_3 = \mathbf{N}. \tag{5-82}$$

固定点あるいは質量中心のまわりの任意のトルクは，(5－81)式と同じように，$\mathbf{R} \times \mathbf{F}$という形に表わすことができる．したがって，その結果としての“速い”こまに対する歳差運動の平均の角速度は，(5－82)式から導くことができて，力$\mathbf{F}$の方向が歳差運動の軸を定める．ジャイロスコープの技術的応用のほとんどすべての場合に，平衡状態の振舞いは(過渡現象を無視すると)(5－82)式から導くことができる．

外部からどのようなトルクも作用しない場合には，ジャイロスコープの自転軸は慣性系から見ると，常に初めの方向を向いている．したがって，ジャイロ

スコープを，一定の方向を示すため，あるいは一定の方向を保つために利用することができる．例えば安定化された台を与えるために用いられる．(5−82)式によって示されているように，歳差運動の様子から，ジャイロスコープはその角速度やそれに作用するトルクを探知し，測定することができる.(5−82)式から，歳差運動の角速度はトルクに比例することに注意しよう．これに比べて，自転していない剛体では，トルクに比例するのは，トルクによって与えられる角加速度である．したがってトルクが取り除かれると，自転していない剛体は，そのときの運動を続けるであろう．同じような条件の下で，ジャイロスコープは歳差運動を止めるだけである．

ジャイロコンパス(gyrocompass)に対しては，もっと複雑な考察が必要である．なぜなら，この場合には，その下で地球がまわっているような非慣性系に固定されたジャイロスコープを扱うことになるからである．ジャイロコンパスの場合には，地球の回転の影響とちょうどつり合うだけのトルクが，外部から自動的に作用することになる．一度地球の回転の向き，すなわち北の方向に回転軸が決められると，ジャイロコンパスは，少なくともゆっくり動いている乗物の中に置かれているときには，その方向は一定に保たれる．速く自転している剛体のすばらしい技術への応用についてのここで述べたことは，明らかに単純化されすぎており，また大変圧縮されている．しかし，この方面にこれ以上進むことは，残念ながら本題から離れすぎることになる．

しかしながら，自然界における歳差運動で，もっと詳しい議論をする価値のある例が２つある．共に，現象それ自身，およびこの章で導かれた手法の例として大変興味あるものである．第１の例は，地球が赤道方向に“ふくらんで”いることから現われるトルクによって生じる歳差運動の型に関するものであり，第２の例は，磁場の中を運動する，電荷をもった質点系の歳差運動である．次の２つの節はこれらの例に関するものである．

5−8　分点と衛星の軌道の歳差運動

前に，地球はその対称軸が黄道面の法線方向のまわりに歳差運動をしていることまであるということを述べた．この運動は，天文学では分点の歳差運動として

知られている．もし，地球が完全な球であるならば，太陽系のどのメンバーからも，地球に対してトルクは作用しない．しかし，すでに指摘したように，地球は球から少しずれていて，近似的に扁平な回転楕円体に極めて近い．主として，太陽と月の万有引力によって，この赤道方向の“ふくらみ”の結果，正味のトルクが存在することになる．まさにこのトルクによって，地軸が空間において歳差運動するのである．

p.226

この歳差運動の速さを計算するには，質点（太陽または月を表わす）と球状でない質量分布との間の万有引力による相互作用のポテンシャルを求めるために，多少ポテンシャル論に立ち入る必要がある．上で得られた慣性テンソルの性質が，この位置エネルギーを求める際に役立つことがわかるであろう．

物体を構成している質点の分布と，他の物体を表わす質量Mの1個の質点とを考えよう（図5－12参照）．いまr_iを物体中のi番目の質点と質点Mの間の距離とすると，質点と物体の万有引力相互作用のポテンシャルは，

$$V = -\frac{GMm_i}{r_i},$$

$$= -\frac{GMm_i}{r\sqrt{1+\left(\frac{r'_i}{r}\right)^2 - 2\frac{r'_i}{r}\cos\psi_i}}, \tag{5-83}$$

となる*．この最後の式には，図5－12の記号が用いられている．すなわち，$\mathbf{r}'_i$はi番目の質点へ，特定の点から引いた動径ベクトルである．この特定の点は，以後第

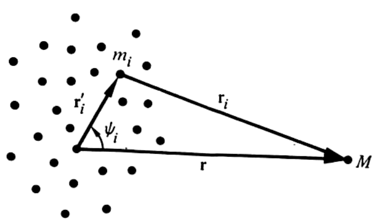


図5－12
拡がりを持った物体と1個の質点の間の万有引力ポテンシャルに含まれる幾何学的関係．

---

*）繰り返された添字については和がとられるということを思い出してほしい．

1の物体の質量中心とする．**r**はそれに対応する質点Mまでの動径ベクトルである．またψ_iは$\mathbf{r}'_i$と**r**との間の角である．（5－83）式はLegendreの多項式を用いて簡単な形に展開できるということは良く知られている．実際，（5－83）式における平方根の逆数はLegendreの多項式に対する母関数（*generating function*）として知られている†．したがって，原点から質点Mまでの距離rがどのr'_iよりも大きければ，次のように展開される．

$$V = -\frac{GM}{r}\sum_{n=0} m_i\left(\frac{r'_i}{r}\right)^n P_n(\cos\psi_i)_i. \qquad (5-84)$$

p.227
ここでは，最初の3つのLegendre多項式だけを用いることにする．参考のためにそれらを書けば，

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad (5-85)$$

である．連続的な球に対しては，密度が半径方向だけに変化する場合には，（5－84）式の第1項以外の項はすべて零になるということが以下に示すように容易にわかる．和の中の第n項は，球対称な物体に対しては，密度を$\rho(r')$とすると，

$$\iiint dV'\rho(r')\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\psi),$$

と書くことができる．**r**方向を極軸とする極座標を用いると，この式は次のようになる．

$$\int r'^2\,dr'\rho(r')\left(\frac{r'}{r}\right)^n \int_{-1}^{+1} d(\cos\psi)P_n(\cos\psi).$$

P_nとP_0との規格直交性から，$\cos\psi$についての積分は$n=0$以外は零となる．これで証明された．

地球の場合のように，物体が球対称からわずかだけずれているとすると，（5－84）式でnが零よりも大きい項は，nが大きくなると急激に減少することが予想される．それゆえ，球の場合のポテンシャルに対する補正としては，（5－84）式の中の最初の零でない項だけを残せばよいであろう．さて，質量

†）例えば，J. Mathews and R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, first ed. p. 164, およびG. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, p. 418を見よ．

中心を原点に選んだために，$n=1$ の項は恒等的に零になる．なぜなら，その項は，

$$-\frac{GM}{r^2}m_i r'_i \cos\psi_i = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}\cdot m_i \mathbf{r}'_i,$$

と書けるが，これは質量中心の定義によって零である．次の $n=2$ の項は下のように書ける．

$$\frac{GM}{2r^3}m_i r_i'^2(1-3\cos^2\psi_i).$$

ここで，$r_i'^2\cos^2\psi_i$ をダイアディック形式に表わすと便利である．そうすると，

$$r_i'^2\cos^2\psi_i = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'_i\mathbf{r}'_i\cdot\mathbf{r}}{r^2},$$

となる．したがって，多少技巧的に項を加えて引くと，位置エネルギーの中の $n=2$ の項は，

$$\frac{3}{2}\frac{GM}{r^5}m_i\mathbf{r}\cdot[r_i'^2\mathbf{1}-\mathbf{r}'_i\mathbf{r}'_i]\cdot\mathbf{r}-\frac{GM}{r^3}m_i r_i'^2,$$

という形になる．この式の第1項には，慣性テンソルのダイアディック形式が現われていることがわかる．他方第2項には，(5－6)式から慣性テンソルのトレースが含まれていることがわかる．したがって $n=2$ の項は次のように書くことができる．

p.228

$$\frac{3}{2}\frac{GM}{r^5}\mathbf{r}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{r}-\frac{GM}{2r^3}\mathrm{Tr}\,\mathbf{I}.$$

そして，球でない場合のポテンシャルに対する近似式は，全体では次のように書ける．

$$V=-\frac{GMm}{r}+\frac{GM}{2r^3}[3I_r-\mathrm{Tr}\,\mathbf{I}]. \qquad (5-86)$$

ここで m は物体（地球）の質量であり，I_r は $\mathbf{r}$ 方向のまわりの慣性モーメントである．慣性テンソルを，主軸系を用いて対角型にした形から，そのトレースはちょうど主慣性モーメントの和になることがわかる．したがって V は次のように書くことができる．

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3}[3I_r - (I_1 + I_2 + I_3)]. \qquad (5-87)$$

（5－87）式は，MacCullagh の公式と呼ばれることがある．これまでの議論では，回転対称という仮定は使われていない．いま，対称軸が主軸系の第 3 軸の方向であるとしよう．そうすると $I_1 = I_2$ である．もしも α, β, γ が主軸系に関する **r** の方向余弦であるとすると，慣性モーメント I_r は，

$$I_r = I_1(\alpha^2 + \beta^2) + I_3\gamma^2 = I_1 + (I_3 - I_1)\gamma^2,$$

と表わされる．I_r に対するこの形を用いると，位置エネルギーに対する（5－87）式は次のようになる．

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3}[3\gamma^2 - 1],$$

あるいは，

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3}P_2(\gamma). \qquad (5-88)$$

（5－88）式の形の一般形は，始めから予言することもできたのである．というのは，質量分布からのポテンシャルは Poisson の方程式に従うからである．いま考えている物体が持っている対称性にふさわしい解は，良く知られているように $P_n(\gamma)/r^{n+1}$ という形の項をもつ展開式で表わされる．（5－88）式は，そのうちの零でない初めの 2 項を示している．しかしながら，この方法では各項の係数は，上に用いた求め方よりも簡単には求まらない．また，上のような V の展開は，例えば任意の荷電物体の静電ポテンシャルの多重極展開（multipole expansion）の，万有引力の場合に対応するものである*ということを注意しておくべきであろう．万有引力の場合に $n = 1$ の項がないのは，万有引力的な“電荷”は 1 つの符号のものだけであるので，万有引力的な双極子モーメントが存在し得ないからである．さらに，慣性テンソルは，4 重極モーメン
p. 229
ト・テンソルと類似な仕方で定義されている．したがって，今求めている力学的効果は，扁平な地球の万有引力的 4 重極モーメントから生じるものとい

*）例えば，J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Sec. 4－1 を見よ．

えよう†.

位置エネルギーに対する(5－88)式の中の項で，物体の向きに依存し，従ってトルクを生じることを可能にするのは，

$$V_2 = \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3} P_2(\gamma), \qquad (5-89)$$

だけである．地球の歳差運動の例では，γ は地球の対称軸と地球の中心から太陽あるいは月に向かう動径ベクトルとの間の方向余弦であることを思い出さなければならない．これらの物体が，それぞれ見かけの軌道をまわると，γ は変化するはずである．γ と，もっと普通に使われる天文学的な角との関係は，図5－13に示されている．図では，太陽あるいは月の軌道が xy 平面内にあるように，また剛体の対称軸が xz 平面内にあるようにとられている．対称軸と z

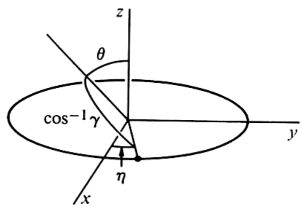


図5－13
質点の軌道に相対的な地球の対称軸を表わす.

方向のなす角 θ は対称軸の傾きを表わす．対称軸方向の単位ベクトルと，天体(太陽あるいは月)に対する動径ベクトルとの内積は，それらの x 成分の積だけを含んでいる．したがって，

$$\gamma = \sin\theta \cos\eta,$$

となる．よって，V_2 は次のように書ける．

$$V_2 = \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3}[3\sin^2\theta\cos^2\eta - 1].$$

†) これまでの議論では，(5－88)式の位置エネルギーを，剛体の場合に制限するようなものは何もないことに注意しよう．剛体であるという制限は，これからの議論で，主軸が物体に固定され，主軸に関する慣性モーメントが時間的に一定である，ということを要求するときに，はいってくるのである.

後にわかるように，軌道運動は歳差運動に比べて非常に速いので，歳差運動の平均の速さを得るという目的に対しては，V_2を，考えている天体の軌道運動の周期にわたって平均したものを用いれば十分である．太陽と月の見かけの軌道は，離心率が小さいから r は一定と仮定してよく，変化は $\cos\eta$ についてのみである．$\cos^2\eta$ の 1 周期での平均は 1/2 だから，平均されたポテンシャルは，

$$\overline{V}_2 = \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3}\left[\frac{3}{2}\sin^2\theta - 1\right] = \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos^2\theta\right],$$

p.230 となる．あるいは最終的には次の形が得られる．

$$\overline{V}_2 = -\frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3}P_2(\cos\theta). \qquad (5-90)$$

（5－90）式から導かれるトルクは，対称軸および軌道面の法線（これは重いこまの場合の鉛直軸と同じ役割を演ずる）の両方に垂直である．したがって，歳差運動は軌道面法線ベクトルの方向のまわりに行われる．歳差運動の速さは（5－82）式から求められるが，位置エネルギーの形が重いこまの場合と異なっているので，より形式的な導出の方が一層望ましいであろう．ポテンシャルが $\cos\theta$ だけの関数であるような場合には，任意の対称軸のある剛体に対して，（5－52）式に従ってラグランジアンは次のように書くことができる．

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - \mathrm{V}(\cos\theta). \qquad (5-91)$$

もし，一様な歳差運動だけを問題にして，初期条件のことは差し当り考えないとすれば，運動方程式の中で $\dot{\theta}$ と $\ddot{\theta}$ を単に零と置くことができる．このとき，θ に対する Lagrange の方程式は，

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = I_1\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - I_3\dot{\phi}\sin\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) - \frac{\partial V}{\partial\theta} = 0,$$

あるいは，

$$I_3\omega_3\dot{\phi} - I_1\dot{\phi}^2\cos\theta = \frac{\partial V}{\partial(\cos\theta)}, \qquad (5-92)$$

となり，もっと一般的なポテンシャルに対する（5－76′）式に類似なものになる．遅い歳差運動というのは，ここでは基本的には $\dot{\phi} \ll \omega_3$となるものであるが，

その場合には（５－92）式において$\dot{\phi}^2$の項を省略することができて，一様な歳差運動の速さは，

$$\dot{\phi} = \frac{1}{I_3\omega_3}\frac{\partial V}{\partial(\cos\theta)}, \qquad (5-93)$$

で与えられる．重いこまに対しては，（５－93）式は（５－74）式の結果と一致することが容易に確かめられる．（５－90）式のポテンシャルの場合には，歳差運動の速さは，

$$\dot{\phi} = -\frac{3GM}{2\omega_3 r^3}\frac{I_3 - I_1}{I_3}\cos\theta, \qquad (5-94)$$

となる．太陽による歳差運動の場合には，rを地球の軌道の半長軸にとり，（３－71）式のKeplerの法則を，

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = \frac{GM}{r^3},$$

の形にしたものを用いると，（５－94）式はもっと簡単な形に直せる．そうすると，軌道運動の角速度ω_0に相対的な歳差運動の速さは，次のようになる．
p.231

$$\frac{\dot{\phi}}{\omega_0} = -\frac{3}{2}\frac{\omega_0}{\omega_3}\frac{I_3 - I_1}{I_3}\cos\theta. \qquad (5-95)$$

$(I_3 - I_1)/I_3$の値として，第５－６節で与えられているものを用い，$\theta = 23°27'$とすると，（５－95）式は太陽によって引き起こされる歳差運動が，黄道面の法線方向のまわりに対称軸が完全に１回転するのに，約81,000年かかるということを表わしている．月は太陽よりもずっと軽いけれども，またずっと近くにもある．それで，結局は月によって引き起こされる歳差運動は太陽によるものよりも２倍以上速い．月の軌道は黄道面に近く，また見かけの太陽の軌道と同じ向きであるので，２つの歳差運動はほぼ算術的に加え合わされ，合成された月と太陽の両方の作用による歳差運動の速さは50.25″/年となり，完全な１回転には約26,000年かかる．この歳差運動の速さは大変遅いので，$\dot{\phi}$をω_3に比べて省略するという近似は十分に成り立っていることに注意しよう．太陽，月および地球の間の相対的な運動は一定であり，また月の軌道は黄道と約5°傾いているので，この歳差運動は**天文学的章動**（*astronomical nutation*）と呼ばれる不規則性

を示す．これらの周期的な不規則性の範囲は大きくはない —— θで約 9″，ϕで約 18″である．それでもこれらはKleinとSommerfeldが示したようなChandler震動として現われるほんとうの章動よりもずっと大きい．後者の振幅は角度にして 10分の数秒を決して越えない．

（5−88）式の形のポテンシャルと，それによる一様な歳差運動の速さの式（5−93）の応用を，さらにもう1つ考えることができる．ポテンシャルは，**相互間の**万有引力の作用を表わすものであることを強調してきた．すなわち，もし自転している地球に作用する正味のトルクが残るとすれば，質点Mに対しても（中心力でない）力が作用することになる．この小さな力の影響は，慣性系から見た，質点の軌道面の歳差運動として現われる．この歳差運動についての近似的な公式もまた，自転している剛体の振舞いに基づいた議論から得ることができる．歳差運動の速さは，軌道運動の角速度に比べて小さいから，今度も軌道にわたる平均をとることができる．この平均は，実質的には質点を1つの剛体の輪で置き換えることである．ただしその輪は，質量がMで，半径が（円と仮定した）軌道の半径に等しく，軌道運動の角速度で対称軸のまわりに自転しているようなものである．（5−90）式は，この輪の位置におけるポテンシャルの場を表わしている．ただし，θは輪の対称軸と地軸とのなす角である．歳差運動の平均の速さは，今度も（5−93）式で与えられるが，**今の場合にはI_3およびω_3は，地球ではなく，自転している輪に関するものである**．したがって，この応用に対しては，（5−93）式を，

$$\dot{\phi} = \frac{\tau}{2\pi M r^2}\frac{\partial V}{\partial(\cos\theta)}, \qquad (5-93')$$

と書き直した方が良いであろう．そうすると，（5−94）式は次の形になる．

$$\dot{\phi} = -\frac{\tau}{2\pi}\frac{3}{2}\frac{G(I_3 - I_1)}{r^5}\cos\theta. \qquad (5-94')$$

（5−94′）式を用いて，例えば地球の扁平度による月の軌道の歳差運動を求め
p.232
ることができる．より最近の応用としては，地球のまわりをまわっている，ほとんど円形の軌道を描く人工衛星の軌道の歳差運動の問題がある．人工衛星の1周期の間に，歳差運動はその1周期の，

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = -\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \frac{3}{2} \frac{G(I_3 - I_1)}{r^5} \cos\theta.$$

の割合だけ進む．ここで，人工衛星の周期に対して，Keplerの法則を適用すると，この結果を，

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = -\frac{3}{2} \frac{I_3 - I_1}{mr^2} \cos\theta, \qquad (5-96)$$

と書き直すことができる．ここでmは地球の質量である．もし地球が一様な球であれば，主慣性モーメントは，地球の半径をRとすると，

$$I_3 \sim I_1 = \frac{2}{5} mR^2,$$

となる．しかし，中心核は外殻よりもずっと密度が大きいので，慣性モーメントは上の値よりもっと小さくなり，実際には

$$I_3 = 0.331 mR^2 \approx \frac{1}{3} mR^2$$

である*．したがって歳差運動は近似的に，

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = -\frac{1}{2} \frac{I_3 - I_1}{I_3} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta. \qquad (5-97)$$

で与えられる．rがRに非常に近いような，“近い”(close)人工衛星に対しては，赤道面に対する軌道の傾きを30°とすると，(5－97)式から，軌道面は700回の軌道運動の間に2πだけ歳差運動をするということがいえる．近い人工衛星の周期はおよそ$1\frac{1}{2}$時間であるから，軌道面の完全な1回転は6週間とちょっとで行われることになる．明らかにこの影響は重要である．人工衛星の軌道面の歳差運動については，後で摂動論の問題を議論するときに，再び扱うであろう．

5－9 磁場中における荷電粒子系の歳差運動

磁場中における荷電粒子系の運動は，通常は剛体的な運動は示さない．しかし

---

*) I_3についての最も良い値は，今では人工衛星の軌道に対する，まさにこのような影響を観測することによって得られている．F. D. Stacey, *Physics of the Earth*, p. 26を見よ．

ながら，個々の例では，その運動についての議論は，これまでに剛体の運動に関連して開発された手法を用いると，最もエレガントに行われる場合がたくさんある．このような理由と，それらの例が原子物理学や核物理学において重要であるという理由で，ここでそのいくつかを簡単に考察することにしよう．

p.233
運動している荷電粒子系の（ある特定の原点に関する）**磁気モーメント**（*magnetic moment*）は次のように定義される*.

$$\mathbf{M}=\frac{1}{2c}q_i(\mathbf{r}_i\times\mathbf{v}_i)\rightarrow\frac{1}{2c}\int dV\rho_e(\mathbf{r})(\mathbf{r}\times\mathbf{v}).\qquad(5-98)$$

ここで，第1の式は電荷 q_i を持った点電荷についての和になっている．他方，第2の式は，電荷密度が $\rho_e(\mathbf{r})$ の連続的な分布への対応した一般化になっている．系の角運動量もこれに対応する表わし方をすると，

$$\mathbf{L}=m_i(\mathbf{r}_i\times\mathbf{v}_i)\rightarrow\int dV\rho_m(\mathbf{r})(\mathbf{r}\times\mathbf{v}),$$

となる．このように，磁気モーメントと角運動量とは，共に同じような形をしている．そして実際ダイアディックを通して関係づけられる．しかしここでは，$\mathbf{M}$ と $\mathbf{L}$ とが直接的に比例している場合だけを議論することにしよう．すなわち，

$$\mathbf{M}=\Gamma\mathbf{L},\qquad(5-99)$$

としよう．これが成立する最も自然な場合は，すべての粒子または連続体のすべての点に対して q/m という比が同じになっている場合である．そのような場合には，**磁気回転比**（*gyromagnetic ratio*）Γ は，

$$\Gamma=\frac{q}{2mc},\qquad(5-100)$$

で与えられる．しかし，粒子の模型や原子のスピンを考慮に入れる場合には，Γ はしばしば指定せずにおかれる．磁気双極子に作用する力およびトルクは，ポテンシャル，

$$V=-(\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}),\qquad(5-101)$$

---

*）例えば，J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. pp. 180－184，あるいは W. K. H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd ed. pp. 130－133 を見よ．

から導かれると考えることができる*.（5−101）式を用いる場合には，磁場は系全体にわたって実質的には一定であると仮定される．実際この描像は，点状の磁気モーメントでその大きさがそれが行う運動によって影響されない場合に最もよく適合している．例えば，永久磁石や原子，またはもっと小さい尺度の系に対して適切な描像である．**B**を一様とすると，ポテンシャルは**B**に相対的な**M**の方向だけに依存する．すなわちその磁気モーメントに作用する力は存在しないが，作用するトルクの方は存在して，

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} \times \mathbf{B}, \tag{5-102}$$

で与えられる（（5−51）式および（5−81）式と比較せよ）．全角運動量の時間的変化率は，このトルクに等しい．したがって（5−99）式を考慮すると，次のように書くことができる．

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} \times \Gamma\mathbf{B}. \tag{5-103}$$

p. 234
ところが，これは，大きさ一定のベクトルが，空間内で**B**の方向のまわりに角速度 $\boldsymbol{\omega} = -\Gamma\mathbf{B}$ で回転している場合の式とまったく同じである．永久磁気双極子に対する一様な磁場の影響は，角運動量ベクトル（および磁気モーメント）に一様な歳差運動を生じるということである．古典的な磁気回転比（5−100）式の場合には，歳差運動の角速度は，

$$\boldsymbol{\omega}_l = -\frac{q\mathbf{B}}{2mc}, \tag{5-104}$$

で与えられ，**Larmor 振動数**として知られている．電子では q が負なので，Larmor歳差運動は**B**の方向のまわりに反時計まわりとなる．

第2の例として，運動している荷電粒子の系を考えよう．ただし，それらの運動の仕方には制限はつけないが，すべての粒子に対して q/m は等しく，また一様で一定な磁場の中にあるとする．さらに粒子間の相互作用ポテンシャルは，スカラーであるそれらの間の距離だけに依存すると仮定する．このような系に対するラグランジアンは（（1−66）式参照），

---

*）Jackson，前掲書 pp.185−187

$$L=\frac{1}{2}m_iv_i^2+\frac{q}{mc}m_i\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{A}\,(\mathbf{r}_i)+V(|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|), \tag{5−105}$$

である．このとき，一定の磁場 **B** はベクトル・ポテンシャル **A** から導かれて，

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r}, \tag{5−106}$$

である． **B** を用いるとラグランジアンは次の形になる（ただし，内積と外積の順序をサイクリックに変えた）．

$$L=\frac{1}{2}m_iv_i^2+\frac{q\mathbf{B}}{2mc}\cdot\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i+V(|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|). \tag{5−107}$$

磁場との相互作用の項は，いろいろな書き方ができる（（5−101）−（5−104）式参照）．すなわち，

$$\frac{q\mathbf{B}\cdot\mathbf{L}}{2mc}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}=-\boldsymbol{\omega}_l\cdot\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i. \tag{5−108}$$

さて，初めの座標系と同じ原点を持つが， **B** の方向のまわりに角速度 $\boldsymbol{\omega}_l$ で一様に回転している“プライムのついた”座標系を用いてラグランジアンを書き表わそう．原点からの距離は， $|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|$ のような距離を表わすスカラーと同じように，もちろんこの変換で不変である．しかしながら，新しい座標軸に関する速度は，元の速度とはちがって，次の関係を満たす．

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_i'+\boldsymbol{\omega}_l\times\mathbf{r}_i\,.$$

この変換によって影響を受ける，ラグランジアンの中の２つの項は，次のように変換される．

$$\frac{m_iv_i^2}{2}=\frac{m_iv_i'^2}{2}+m_i\mathbf{v}_i'\cdot(\boldsymbol{\omega}_l\times\mathbf{r}_i)+\frac{m_i}{2}(\boldsymbol{\omega}_l\times\mathbf{r}_i)\cdot(\boldsymbol{\omega}_l\times\mathbf{r}_i),$$

$$-\boldsymbol{\omega}_l\cdot\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i=\qquad-\boldsymbol{\omega}_l\cdot(\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i')-\boldsymbol{\omega}_l\cdot(\mathbf{r}_i\times m_i(\boldsymbol{\omega}_l\times\mathbf{r}_i)).$$

p. 235
内積と外積とを入れかえると， $\boldsymbol{\omega}_l$ と $\mathbf{v}_i'$ の両方について１次の項は，同じ大きさで反対符号であり，ラグランジアンの中で消し合うことがわかる．同様の入れかえを， ω_l の２次の項に対して行うと，それらは同じ形になり， $\boldsymbol{\omega}_l$ によって定義される軸のまわりの系の慣性モーメントと関係づけることができる（（255）

ページを見よ）．それで，ラグランジアンの中の２次の項は，実際次のように書ける．

$$-\frac{m_i}{2}(\boldsymbol{\omega}_l\times\mathbf{r}_i)\cdot(\boldsymbol{\omega}_l\times\mathbf{r}_i)=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_l\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}_l=-\frac{1}{2}I_l\omega_l^2. \quad (5-109)$$

ここで I_l は $\boldsymbol{\omega}_l$ の方向の軸のまわりの慣性モーメントである．このようにして，回転している座標系を用いると，ラグランジアンは次のような簡単な形になる．

$$L=\frac{1}{2}m_iv_i'^2+V(|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|)-\frac{1}{2}I_l\omega_l^2. \quad (5-110)$$

この式には，磁場について１次の項はまったく含まれていない．２次の項の相対的な大きさについて知るために，系の運動が，振動数が ω であるような回転から成っている場合，例えば原子核のまわりをまわっている電子を考えてみよう．このときには，球対称から余りずれていない場合には，運動エネルギーは近似的に $\frac{1}{2}I\omega^2$（慣性モーメントには添字はつかない）である．また ω_l について１次の項は，$\boldsymbol{\omega}_l\cdot\mathbf{L}\approx I\omega_l\omega$ のオーダーである．したがって，（５－110）式の２次の項は，運動エネルギーに比べて $(\omega_l/\omega)^2$ のオーダーであり，１次の項に相対的に (ω_l/ω) のオーダーである．原子あるいはそれよりも小さい系では，自然振動数はLarmor振動数に比べてずっと大きい．例えば，スペクトル線の振動数（これは自然振動数の差である）を，Larmor振動数に比例する単純Zeeman効果における振動数のずれと比べてみればよい．したがって，このような系に対しては，回転座標系から見た運動は，磁場がないときに実験室系から見たのと同じである．われわれの得たのは **Larmor の定理**であって，それは次のことを述べている．$\mathbf{B}$ の１次までは，古典的な系に対する一定の磁場の影響は，その正常な運動に，角振動数 $\boldsymbol{\omega}_l$ をもつ一様な歳差運動を重ね合わせたものである．

参 考 書

L. Brand, *Vector and Tensor Analysis*. J. W. Gibbsがダイアッドとダイアディックを導入した．これらについての最も完全な解説はGibbsとWilsonによる古典的な著作 *Vector Analysis*（1901）に与えられている．ダイアディックについての徹底的な取り扱いはWillsによる少し後の著書*Vector and Tensor Analysis*に見出される．

第4章で挙げたテンソルおよび行列についての教科書は，この章の関係した事柄のほとんどの場合に使える．Brandの書物をここに付け加えた理由は，この書物にはテンソルについての標準的な事項の他に，ベクトルの1次関数を扱っている第4章に，ダイアディックについて多くのことが述べられているからである．最後の章には大変はいり易い4元数（ quaternion ）についての簡単な紹介が与えられている．

K. Symon, *Mechanics.*　Symonの書物の慣性テンソルの性質を扱った第10章では，ダイアディックの実際上の有用さが例を挙げて示されており，多くの興味ある例が与えられている．ダイアディックやテンソルに関係のある代数がわかり易く述べられている．

p. 236

E. J. Routh, *Dynamics of Rigid Bodies, Elementary and Advanced.*　19世紀には，剛体の力学は力学の研究の先端における主な問題の1つであった．最新版が1890年代に出版されたRouthによる2巻から成るこの書物は，その当時までにこの分野で得られた成果を，便利な，しかし良く練られた形にまとめている．多くの話題に対して，これは英語で書かれたほとんど唯一の古典になっている．RouthはMaxwellの同僚であり，微小振動の安定性の研究のパイオニアであった．この分野での彼の研究は，依然として現在行われている研究と関連をもっている．

W. D. MacMillan, *Dynamics of Rigid Bodies.*　剛体の力学を系統的に研究するためには勧められないけれども，この書物の中には他の書物では容易に見ることのできない多くの題材が含まれている．特に第Ⅶ章には，Poinsotの運動および重い対称こまの運動について，長い詳細な議論がしてあって，楕円関数を用いて陽に表わした解も含んでいる．ころがる剛体に関する複雑な問題を扱った章も注目に値する．

A. Gray, *A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion.*　第1次世界大戦におけるジャイロスコープへの関心から生まれた産物であるが，Grayの書物は剛体の力学の分野におけるイギリスの伝統の絶頂を表わしている．幾分か密度の濃い，ほとんどベクトルの手法を用いないやり方で，地球の回転軸のふらつきから，ブーメランの理論やディアボロ（ diabolo ）の操作に至るまでの広い範囲の話題を扱っている．同じ領域の多くの議論が，KleinとSommerfeldの書物ではもっと系統的に行われている．

F. Klein and A. Sommerfeld, *Theorie des Kreisels.*　この4巻にのぼる，こまの理論についての記念すべき労作は，外観的には固苦しくて誇大な，典型的なドイツの“ Handbuch ”の体裁をそなえている．しかしその外観は見せかけだけのものである．というのは，ドイツ語で書かれているというハンディキャップがあるにもかかわらず，この書物は大変読み易いからである．美しい，くだけた文章はなめらかであって，

Sommerfeldのその後の著書のすべてに見られるように，教育的に十分な注意が払われている．取り扱いは時に高度に数学的になるけれども，物理的世界は決して見失なわれてはおらず，公式の迷路にはまりこむこともない．書名によってこまとジャイロスコープに限定されてはいるけれども，実際にはこの書物は剛体の力学の全般にわたる自由な教育を与えてくれ，また時には物理学および数学の他の分野への周遊旅行も行われる。このように，第Ⅰ章では，他の項目と共に，Eulerの角，無限小回転およびCayley-Kleinのパラメーター，およびそれらのホモグラフィック変換および4元数との関係が論じられている．この章についての後のノート（第Ⅳ巻にある）では電気力学および特殊相対性理論との関係が論じられている（量子力学はまだはるか将来のことであった）．概して，第Ⅰ巻では，剛体の力学における必要な基礎を与えるとともに，わずかの数学を用いたこまの運動の物理的な記述が与えられている．

第Ⅱ巻は，重い対称こまの詳細な論述に捧げられているが，そこにはまた，Poinsot運動についてもたくさんのことが述べられている．そして，非対称こまについて知られていることの要約も含まれている．正常と擬正常な歳差運動の区別が導入されるのもここにおいてであって著者達は多くの時間を割いて2つの運動と正常な歳差運動への近づき方を調べている．ジャイロスコープの歳差運動の通俗的なあるいは初等的な“導出”に対する徹底的な論破のために多くのページが与えられている（著者達はこれらの導出法が不満足であることが，彼等にこの著書を書かせる動機になったということを述べている！）．運動の安定性の問題についての長い議論がある．取り扱いの大部分は楕円積分を用いた解に基づくものであって，ここでなされたように単に小さい章動という近似に基づくものではない．

第Ⅲ巻は，摂動力（主として摩擦力）および，天文学的な応用（地球の章動，分点
p. 237 の歳差運動等）について書かれている．地球の極の移動の議論は，地球の弾性の効果の見積り，および風の循環による大気の質量の輸送をも含んでおり，この書物が書かれた当時としては特に完全なものになっている．第Ⅳ巻は技術的な応用についてのものであるが，これは今ではやや時代遅れになっている．

F. KLEIN, *The Mathematical Theory of the Top.* 1896年にFelix KleinはPrincetonにおいて一連の講義を行ったが，そのときの講義ノートがこの薄い書物になった．この書物は，いくつかの互いに関連のない数学の論文を付け加えて，最近再版された．この書物の大部分は，こまの理論の高度に抽象的な数学を詳細に述べたものであるが，最初の講義ではCayley-Kleinのパラメーターについて，わかり易い説明が与えられている．興味深いことは，この書物でも，またSommerfeldとの共著の大きな書物でも，時間を第4の次元とする4次元の非ユークリッド空間が用いられている

ことである. ── これは, 特殊相対性理論(第7章を参照せよ)でそのような空間が用いられるよりも何年も前のことである. しかしながら, この時には, その空間は単に数学的な便宜のために用いられたのであって, それに物理的意味を与えようとする意図はなかったのである.

A. SOMMERFELD, *Mechanics*.　Kleinとの共著になっているSommerfeldのこまに関する労作は, 彼の初期の著書の1つであるが, この教科書は, 有名な理論物理学講義の叢書の一部として, それよりも40年以上後に出版されたものであって, 彼の晩年の著作の1冊である. こまに関する彼の興味は, このときになっても衰えていないとみえて, かなりのスペースがジャイロスコープやこまに関する広い範囲の現象についての, 定性的な議論のために当てられている. 対称でないこまについてさえも, 1, 2ページは述べられている. これら一連の問題を取り扱った30ページぐらいが, 剛体に関する章のほとんど全部を占めていて, 実際上は, もっと詳しい仕事の要約となっている! その取り扱いは, 問題を掘り下げるというよりは, むしろ広い範囲にわたっており, 詳細な議論はあまり行われていない.

V. D. BARGER AND M. G. OLSSON, *Classical Mechanics, A Modern Perspective*. この中級程度の教科書を参考文献に挙げた理由は, この書物は"逆立ちこま"とは何であり, どのようにして逆立ちするかということについて, 簡単ではあるけれども記述しているほとんど唯一の書物だからである(254ページ). 逆立ちこまが, 王族やすぐれた物理学者を, 同じようにいかに魅了したかという証拠写真が, S. Rozentalが編集した*Niels Bohr*という書物の208ページの向いのページにある. 前に293ページで挙げた参考文献に加えて, T. R. Kane and D. A. Levinson, *Journ. Applied Mech.* **45**, 903 (Dec. 1978)を挙げておこう. この論文には, 逆立ちこまの問題の現代的な電子計算機による解が与えられており, また広い範囲にわたる参考文献の表が載っている.

J. AHARONI, *Lectures on Mechanics*.　互いにあまり関連のない, 力学の話題についてのとりとめのない随筆集であるが, この文献には, 広い範囲にわたる図が集められている点で貴重である. 中でも第15～17章にある, 注意深く考えられた図は, 慣性テンソル, Poinsotの運動, ジャイロコンパスに関するわかりにくい点を図式的に明らかにしている.

L. MEIROVITCH, *Methods of Analytical Dynamics*, および S. W. GROESBERG, *Advanced Mechanics*.　力学の現代の工学的応用においては, 剛体の力学が中心的な役割を演じている. それはジャイロスコープのような種々の装置があるというだけでなく, 宇宙船のような, 完全には剛体でない系に対する第1近似を与えるからで

ある．単に問題を定式化するだけでなく，現実の問題を解く必要が生じた場合には，力学の手法に関して，物理学者の視点とは対照的な概観がしばしば要求される．これら2冊の教科書は，技術的な問題に取り組むために必要な現代的な方法を紹介している．

E. LEIMANIS, *Motion of Coupled Rigid-Bodies.* ロシヤの応用数学者達は，固定点のまわりの1つまたは2つ以上の剛体の運動という一般的な問題に大いに注目してきた．彼等の努力は，1880年代のSonya Kovalevskayaの時代から現在に至るまでつづいている．彼等の研究の多くは英語では読めない．Leimanisの文献は，応用数学者
p.238
の立場から，剛体の運動を現代的に扱ったものであって，ロシヤの文献の完全な理解の下に書かれており，Lie列の使用のような最新の数学的技巧も採り入れられている．

W. H. MUNK AND G. J. F. MACDONALD, *The Rotation of the Earth.* 剛体の力学の最も魅力的な応用の1つは，回転している地球に関する現象に対するものである――ただし，最初に地球とその付属物がどの程度剛体からはずれているかを知らなければならないけれども．MunkとMacdonaldの書物は，これらの地球物理学的応用に対する良く書かれた明快な入門書である．この書物では，古代の日，月食の歴史的記録による大陸移動説から，地震によるChandler震動の励起の問題に至るまでの範囲の事柄が扱われている．幸か不幸か，その扱い方は確定的なものとは考えられない．なぜなら，この分野は急速な発展を続けており，この書物が出版された1960年以後に重要な進歩があったからである．しかしいずれにしても，地球の回転の研究の手始めとしては，MunkとMacdonaldの書物は適当であるように思われる．

F. D. STACEY, *Physics of the Earth.* 第2章には，分点の歳差運動やChandler震動のような話題について簡単な議論がなされており，また最近の文献がでている．

W. WRIGLEY, W. M. HOLLISTER, AND W. G. DENHARD, *Gyroscopic Theory, Design and Instrumentation.* ジャイロスコープを用いた装置は，慣性航行(inertial navigation)の現代における発展に必要不可欠である．この問題について公刊された文献はかなりの量にのぼっており，公刊されない文献はさらにずっと多い(その他に現場の技術者の間で口伝えされているものもかなりある)．この書物は，有名なM. I. T. のDraper Instrumentation Laboratoryから出されたものであるが，回転行列の議論から始まって，実際の装置の詳細な青写真に至るまでのことを扱っていて，この分野の適切な現代的概観を与えている．WrigleyとHollisterによる短かい要約された論文，"The Gyroscope: Theory and Application", *Science* **149**, 713 (Aug. 13, 1965)がわかりやすいかも知れない．

演 習 問 題

1. $\mathbf{R}_i$を，系の i 番目の質点の座標に関連した反対称行列で，その行列要素が $R_{mn} = \epsilon_{mnl}x_l$ で与えられるものとすれば，慣性テンソルの行列は次のように書けることを証明せよ．

$$\mathbf{I} = -m_i(\mathbf{R}_i)^2.$$

2. 慣性モーメントを，

$$I = m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n})\cdot(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}),$$

と定義したものは，ベクトル演算を行うと（5－19）式になることを示せ．

3. 直円柱の中心に関する慣性楕円体が球になるとき，直円柱の高さと直径の比はいくらか．

4. 一様な質量密度をもつ直角2等辺3角形の扁平な剛体の，質量中心のまわりの主慣性モーメントを求めよ．主軸はどうなるか．

5. 等しい質量を持つ3つの質点が $(a, 0, 0)$，$(0, a, 2a)$ および $(0, 2a, a)$ の位置にある．原点のまわりの主慣性モーメントおよび主軸を求めよ．

6. 高さ h，半頂角 α および密度 ρ の一様な直円錐が，一様な水平面上をすべらずに，その側面でころがる．そのとき，時間 τ の後に初めの位置に戻るとする．直円錐の運動エネルギーおよび角運動量の成分を表わす式を求めよ．

p. 239
7. 固定点まわりの一般的な剛体の運動に対して，運動エネルギー T の時間的変化は，

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{N},$$

で与えられることを示せ．

8. 一般化座標 ψ に対する（1－53）式の形のLagrangeの方程式から，Eulerの運動方程式（5－39′）を導け．

9. a）長さ l の，重さの無視できる棒の両端に，同じ質量 m の質点が取りつけられている．棒はその中心を通り，棒と角 θ をなす軸のまわりに，一様な回転をさせられている．Euler の方程式から，棒を回転させているトルクの，棒の主軸方向の成分を求めよ．

b）トルクについての基本的な方程式（1－26）から，空間に固定された軸の方向のトルクの成分を求めよ．これらの成分が，a）で求めたものと両立することを示せ．

10. 適当にとられた回転座標系に対して，（5－38）式は剛体以外の系の運動に対しても成立する．剛体的でない一般的な運動に対して，もし回転軸を連続体の（瞬間的な）慣性主軸に一致するように選ぶとすると，（5－39）式は次式で置き換えることができ

ることを示せ．

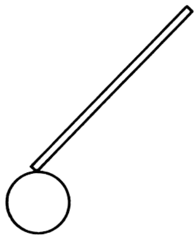
$$\frac{d(I_i\omega_i)}{dt}+\epsilon_{ijk}\omega_j\omega_k I_k+\frac{dl_i}{dt}+\epsilon_{ijk}\omega_j l_k=N_i,\qquad i=1,2,3.$$

ここで，

$$l_i=\int dV\rho(\mathbf{r})\epsilon_{ijk}x_j v'_k\,,$$

である．ただし，$\rho(\mathbf{r})$は点 $\mathbf{r}$ における質量密度，$\mathbf{v}'$は回転系に関する $\mathbf{r}$ にある系の部分の速度である．これらの方程式は **Liouville の方程式**と呼ばれることがあり，大気や海洋を含めた地球のような，ほぼ剛体的な系の運動を議論する際に適用される．

11. 平面振子は，長さが l で厚さが無視できる質量 m の，一端で1つの鉛直面内に吊された棒と，その他端に付けられた半径 a，質量 M の一様な円板からできている．ただし，円板はその面を含む鉛直な平面内で自由に回転できるようになっている．Lagrange 形式の運動方程式を作れ．



12. 複振り子は，薄い板の形をした剛体を，重心とは違った点で鉛直面内に吊したものである．この振子が小さい振動をするときの周期を，重心のまわりの回転半径と，重
p.240
心から支点までの距離を用いて計算せよ．もしこの振子が，重心から異なる距離にある2つの支点に対して同じ周期を持てば，これらの距離の和は，相当単振子の長さに等しいことを示せ．

13. 質量 M，長さ $2l$ の一様な棒が，一端を力の定数が k のばねにつないで吊り下げられている．この棒は1鉛直面内だけで自由に振動できる．また，ばねは鉛直方向にだけ動くように拘束されている．ラグランジアン形式における運動方程式を作れ．

14. 一様な棒の両端が，鉛直面内にある滑らかな円周の上を動くようになっている．この棒が円の中心において張る角が 120°であれば，相当単振子の長さがこの円の半径に等しいことを示せ．

15. 静止している自動車が，1つの扉を最初直角に開いたままで動き出す．扉の蝶番（ちょうつがい）が，車の前側についていれば，扉は自動車が速度を得るとパタンとしまるであろう．自動車の加速度 f は一定，扉の回転軸のまわりの回転半径は r_0，また扉

の質量中心は蝶番から a の距離の所にある場合に，扉がしまるまでに要する時間を表わす公式を求めよ．もし f が $1\,\mathrm{ft/sec^2}$ で，扉の幅が 4 ft の一様な長方形であれば，この時間は約 3.04 秒になることを示せ．

16. 1つの車輪が，水平面と α の角をなす平らな斜面をころがり落ちる．車輪の面は常に斜面に垂直になるように拘束されているが，その面に垂直な軸のまわりには回転することができる．Lagrange の運動方程式と，未定乗数法を用いて，車輪の2次元運動に対する解を求めよ．

17. a）水平面上をすべらずにころがる一様な球に対する拘束条件を，Euler の角を用いて表わせ．拘束は非ホロノミックであることを示せ．

b）Lagrange の未定乗数法を用いて，この問題に対する Lagrange の運動方程式を作れ．並進と回転による運動エネルギーは別々に保存されることを示せ．他に運動の定数はあるか．

18. 対称軸のある剛体がトルクを受けずに一様な歳差運動をしている．Euler の角に対して，時間の関数としての解析的な解を求めよ．

19. a）トルクを受けない対称こまの角運動量ベクトルは，剛体系からみれば対称軸のまわりを角振動数 Ω で回転することを示せ．また，空間中では対称軸は固定されている角運動量ベクトルのまわりを，角振動数，

$$\dot{\phi} = \frac{I_3\omega_3}{I_1 \cos\theta},$$

で回転することを示せ．ここで ϕ は角運動量ベクトルを空間系の z 軸としたときの節線の Euler の角である．

b）第4章の演習問題19の結果を用いて，$\boldsymbol{\omega}$ は空間において角運動量ベクトルのまわりを，同じ角振動数 $\dot{\phi}$ で回転するが，そのとき，$\boldsymbol{\omega}$ と $\mathbf{L}$ との間の角 θ' は，

$$\sin\theta' = \frac{\Omega}{\dot{\phi}} \sin\theta'',$$

で与えられることを示せ．ただし θ'' は対称軸に対する $\boldsymbol{\omega}$ の傾きの角である．上の結果から，第5－6節に与えた数値を用いて，地球の回転軸と角運動量の軸とが，地表面において 0.6 inch 以上は決して離れないことを示せ．

p. 241

c）a）と b）の結果を用いて，力の働らかない対称こまの運動は，対称軸を軸とし，こまに固定している円錐が，角運動量の方向に軸をもち，空間に固定している円錐の上をころがって行くときの回転運動で表わすことができることを示せ．角速度ベクトルは2つの円錐が接触する直線の方向にある．同じような表わし方は，慣性楕円体を用いる Poinsot の作図法から直ちに得られることを示せ．

20. 一般の，対称軸を持たない剛体に対して，本文の274ページで幾何学的に示された安定性の定理を，各主軸のまわりの回転からの小さなずれに対するEulerの運動方程式の解を調べることによって，解析的に証明せよ．このとき$\boldsymbol{\omega}$の方向は主軸の方向からわずかしか違っていないので，$\boldsymbol{\omega}$の軸方向の成分は一定であるとし，また軸に垂直な方向の成分の積は無視できるとする．3つの主軸のそれぞれの場合に，回転からずれた運動が有界かどうかを論ぜよ．

21. 剛体が対称軸を持たないときには，トルクの作用しない運動に対するEulerの運動方程式の解析的な解を，初等関数を用いて表わすことはできない．しかし，エネルギーおよび運動量の保存則を用いれば，剛体に固定された軸に対する$\boldsymbol{\omega}$の成分は楕円積分を用いて表わすことができることを示せ．

22. ω_iをEulerの角を用いて表わすことによって，重い対称こまの問題に対してEulerの運動方程式を適用せよ．Eulerの運動方程式をこの形にすると，2つの運動の積分(5－53)式および(5－54)式が直ちに得られることを示せ．

23. Eulerの運動方程式から，運動が章動をともなわない一様な歳差運動になるという条件をつけることによって，重力場において対称なこまが一様な歳差運動をするための条件(5－77)を求めよ．

24. 重い対称こまに対する角運動量の大きさは，θと運動の定数だけの関数として表わすことができることを示せ．その1つの結果として，角運動量ベクトルは，対称軸が一様な歳差運動をする場合に限って，一様な歳差運動をすることを証明せよ．

25. 第5－6節では，地球に作用するトルクはないものとして，極のまわりにおける地球の回転軸の歳差運動を計算した．一方第5－8節では，地球は太陽と月のトルクによって，強制された歳差運動を行うことを示した．実際には，どちらの結果も正しいのである．すなわち，地球が対称軸のまわりで行う回転軸の運動は，その強制された歳差運動における地球の章動として現われるのである．このことを証明するために，重い対称こまに対して，正味の歳差運動の角速度$\beta/2a$に比べては大きく，ω_3に比べては小さいような初速度$\dot{\phi}_0$が与えられたとして，θおよび$\dot{\phi}$を時間の関数として求めよ．このような条件の下では，こまの対称軸の運動の限界を与える単位球面上の2つの円は，なお極めて接近しているが，対称軸の軌跡は図5－9(b)のような形になる．すなわち，天頂のまわりを非常にゆっくりとまわる大きなループを示す．この場合に対しても，(5－71)はやはり成立するが，このときには，

$$x_1 = \left(\frac{\beta}{a^2} - \frac{2\dot{\phi}_0}{a}\right)\sin^2\theta_0,$$

であることを示せ．上に求めたθ，$\dot{\phi}$の値から，ω_1，ω_2を求め，さらに$\dot{\phi}_0$に比べて$\beta/2a$が小さければ，ベクトル$\boldsymbol{\omega}$は対称軸のまわりを角速度，

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_3$$

で歳差運動することを示せ．これは（5－49）式と一致している．第5－6節で与えた数値を用いて，$\dot{\phi}_0$が約1,600年の周期に相当することを示せ．したがって$\dot{\phi}_0$は周期1日の自転の角速度よりは確かに小さく，26,000年という歳差運動の周期に対応する$\beta/2a$に比べては十分大きい．

26. a）ある慣性系と原点が同じで，その慣性系に対して一定の角速度$\boldsymbol{\omega}_0$で回転しているプライムのついた座標系を考える．もし質点が，原点までの距離だけに依存するポテンシャルVから導かれる保存力だけを受けているとすると，この系に対するラグランジアンをプライムのついた座標系で表わせば，次のように書けることを示せ．

$$L = T' + \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{L}' + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{I}' \cdot \boldsymbol{\omega}_0 - V,$$

ここでプライムは，量がプライムのついた座標系から見たものであることを示す．新しく付け加わった2つの項の物理的意味はそれぞれ何であるか？

b）$\boldsymbol{\omega}_0$が$x_2'x_3'$平面内にあり，対称こまの対称軸は$x_3'x_1'$平面内だけを動くと仮定する．したがって対称こまの向きを表わすにはEuler の角は2つだけが必要である．いま，剛体はその質量中心が原点に固定されており，$V=0$であるとする．このとき，対称軸は平面振子の運動方程式に従って，x_3'軸のまわりに振動することを示せ．また微小振動の場合の振動数を求めよ．このことはジャイロコンパスの原理を示す1つの例になっている．

27. 対称こまを作っている各質点が，その質量に比例した電荷を持ち，したがって比e/mが一定になっているとしよう ── いわゆる荷電対称こま（charged symmetric top）である．もしそのような剛体が一様な磁場の中で回転すると，（5－108）式からラグランジアンは，

$$L = T - \boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{L},$$

となる．Tが一定であること（このことは，磁場は運動する電荷に対して仕事をしないというLorentz の力の性質を示すものである）を証明せよ．また，その他の運動の定数を見出せ．対称軸のまわりの初めの回転の速さに比べてω_lがずっと小さいと仮定して，章動と歳差運動の振動数および振幅を表わす式を求めよ．章動および歳差運動の運動エネルギーはどこからくるか？

第6章　微　小　振　動

p. 243
ラグランジアンによる定式化において，最もよく取り扱われる力学的運動の１つの種類は，つり合いの位置のまわりに系が行う微小な振動運動である．そのような微小振動の理論の応用は，音響学，分子振動，機械振動，電気的な結合回路にまでわたっている．安定なつり合いの条件からの系のずれが十分小さいならば，その運動は一般に結合された線形調和振動子の系の運動として記述することができる．読者は自由振動および強制振動の両方において，減衰のある場合とない場合の１自由度の単振動の性質をよく知っているものと仮定する．ここでは，１自由度よりも多くの自由度をもつ離散的な系に対して適当な方法について，力点がおかれるであろう．以下に見られるように，考察される力学系は，剛体を含む必要は全くないけれども，必要とされる数学的な技巧は，剛体運動を調べるのに使われたものと大変よく似ていることがわかる．安定な運動のまわりの振動の類似な取り扱いも展開することができるが，これらは第８章で与えられるハミルトニアンによる定式化によって最も容易に行われる．

6−1　問題の定式化

ポテンシャル・エネルギーが，位置座標だけの関数である保存系を考える．そして系の一般化座標 $q_1,\ldots,q_n$ を定義する変換式は時間を陽に含まないと仮定する．したがって，時間に依存する拘束は除外する．さて，系に作用する一般化力が零になる場合，すなわち，

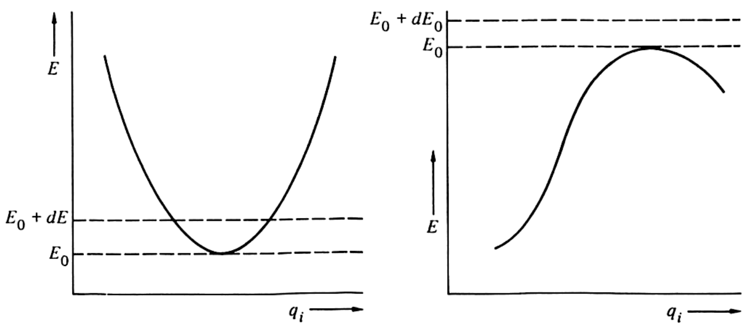
$$Q_i=\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0=0, \qquad (6-1)$$

である場合は，系が**つり合い**（*equilibrium*）にあるといわれる．したがって，

ポテンシャル・エネルギーは系のつり合いの配置 $q_{01}, q_{02}, \ldots, q_{0n}$ に対して極値をとる．もし系の配置が初めつり合いの状態にあって，かつすべての初速度 $\dot{q}_i$ が零であれば，系はいつまでもつり合っているであろう．力学系のつり合いの例は無数にある―― 静止している振子，零位置にある鏡検流計（suspension galvanometer），1端で立っている卵など．

p.244

つり合いにある系に小さい擾乱を与えたとき，その系が単に静止の位置のまわりに小さい有界な運動を行うだけであれば，そのつり合いの位置は**安定**(*stable*)であるといわれる．もし，無限小の擾乱が究極的には系に有界でない運動を引き起こす場合には，そのつり合いは**不安定**(*unstable*)である．静止している振子は安定なつり合いにあるが，1端で立っている卵は明らかに不安定なつり合いの1つの例である．V の極値が極小であるときには，直ちにわかるように，つり合いは安定でなければならない．系がつり合いの位置からエネルギーが dE だけ増すような擾乱を受けたとしよう．もし V がつり合いの位置で極小であれば，この位置からどんな具合にずらしても，V は増加するであろう．そうすると，エネルギー保存則によって速度は減少しなければならず，遂には零になる．これは，運動が有界であることを示している．それに反して，もしつり合いの位置から離れるときに V が減少すれば，運動エネルギー，したがって速度はいくらでも増加する．これは不安定な運動に対応している．図6－1に象徴的に



(a)　安定　　　(b)　不安定

図6－1
つり合いの位置における位置エネルギー曲線の形．

示した位置エネルギー曲線の形を調べてみることによって，図式的にも同じ結論を得ることができる．つり合いが安定であるためには，Vが極小でなければならないということの最も厳密な数学的証明は，以下の議論の中で与えられるであろう．

われわれは，系の安定なつり合いの配置のすぐ近くにおける運動を考えよう．つり合いからのずれは小さいとしているから，すべての関数をつり合いの配置のまわりでTaylor級数に展開して,最低次の項だけを残すことができる．一般化座標 q_i のつり合いの値からのずれをη_iと書くことにしよう．

$$q_i = q_{0i} + \eta_i \ . \qquad (6-2)$$

これらのη_iをあらためて運動を記述する新しい一般化座標と考えることができる．位置エネルギーを q_{0i} の近傍で展開すると，

$$V(q_1,\ldots,q_n) = V(q_{01},\ldots,q_{0n}) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 \eta_i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i\eta_j + \cdots, \qquad (6-3)$$

が得られる．ここで，同じ添字が１つの項の中に２度現われるとその添字について和をとるという和の規約がいつものように使われた．η_iについて１次の項
p.245 はつり合いの条件（６－１）によって自動的に零になる．級数の第１項はつり合いの配置における位置エネルギーであるが，任意にとることのできる位置エネルギーの零点を，つり合いにあるときのポテンシャルのところまでずらせばこの項も零にすることができる．したがって，位置エネルギーVの第１近似は，η_i について２次の項まで残して，

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i\eta_j = \frac{1}{2}V_{ij}\eta_i\eta_j , \qquad (6-4)$$

となる．ここで，Vの２階偏導関数を V_{ij} と書いてあるが，この V_{ij} はつり合いにおける q_i の値だけできまる定数である．定義から明らかなように，V_{ij} は対称，すなわち $V_{ij} = V_{ji}$ である．係数 V_{ij} はいろいろな状況の下で零となること

ができる．例えば，ポテンシャルが特定な座標によらず，そのため，その座標の任意の値のところにつり合いの位置が現われるようにすることができる．そのような場合には，それは**変わり易い**（*labile*），**中立な**（*neutral*）あるいは**中性の**（*indifferent*）つり合いと呼ばれる．また，例えば，その点においてポテンシャルが η_i について４次のように振舞うこともあって，再び１個または数個の V_{ij} を零にすることがある．どちらの場合も，以後の数学的議論において特殊な取り扱いが必要になる．

運動エネルギーに対しても同じような級数展開をすることができる．この章では，一般化座標は時間を陽に含まないとしているから，運動エネルギーは速度について２次の同次関数である（（１－71）式参照）.

$$T=\frac{1}{2}m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j=\frac{1}{2}m_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j. \qquad (6-5)$$

係数 m_{ij} は一般に座標 q_k の関数であるが，それらはつり合いの配置のまわりで Taylor 級数に展開することができる．

$$m_{ij}(q_1,\ldots,q_n)=m_{ij}(q_{01},\ldots,q_{0n})+\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)_0\eta_k+\cdots.$$

（６－５）式はすでに $\dot{\eta}_i$ について２次であるから，T に対する零にならない最低の近似は，m_{ij} の展開で第２項以下を全部落したものを（６－５）式に代入すれば得られる．それゆえ，関数 m_{ij} のつり合いにおける値を T_{ij} と書くことにすれば運動エネルギーは，

$$T=\frac{1}{2}T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j, \qquad (6-6)$$

と書くことができる．このときもまた，T_{ij} は対称であることは明らかである．なぜなら，（６－６）式の各項は，添字を交換しても変わらないからである．（６－４）と（６－６）式からラグランジアンは，

$$L=\frac{1}{2}(T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j-V_{ij}\eta_i\eta_j), \qquad (6-7)$$

で与えられる．一般化座標として η_i をとれば，（６－７）式のラグランジアンから次の n 個の運動方程式が得られる．

$$T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j = 0. \qquad (6-8)$$

p. 246
この式を導くときに係数 V_{ij} および T_{ij} の対称性を用いた. 一般に(6－8) 式の各々の式はすべての η_i を含んでいる. つり合いの近くでの運動を求めるために解かなければならないのは，まさにこの連立微分方程式なのである.

6－2　固有値方程式と主軸変換

運動方程式(6－8)は定数を係数とする線型微分方程式であって，電気回路論においてなじみ深い形のものである．それゆえ

$$\eta_i = Ca_i e^{-i\omega t} \qquad (6-9)$$

の形の振動的な解を試みに代入してみるとよさそうである．ここで $C\dot{a}_i$ は各座標 η_i の振動に対する複素振幅であって，Cはすべての座標に共通な尺度因子として便宜上導入されたものである．実際の運動に対応するのは(6－9) 式の実部であることはいうまでもない．試みの解(6－9)式を運動方程式に代入すれば，振幅に比例する因子 a_j に対する次の連立方程式が導かれる.

$$(V_{ij}a_j - \omega^2 T_{ij}a_j) = 0. \qquad (6-10)$$

(6－10)式は n 個の a_i に対する n 個の連立１次同次方程式であり，したがって，すべての a_i が零であるという自明の解以外の解をもつのは, 係数の作る行列式が零になる場合に限る．すなわち,

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \cdots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0, \qquad (6-11)$$

でなければならない．行列式の形に表わされたこの条件は，実質的にはω^2に対する n 次の代数方程式であって，この行列方程式の根は，(6－9) が運動方程式の正しい解を表わすための振動数 ω の値を与える．これら各々のω^2の値に対して，連立方程式(6－10)を a_i について解くことができる．もっと正確にいえば，(n－1)個の振幅を残りの１つの振幅 a_i で表わすことができる.

このようなことはすべてなじみ深いことであって，一般的な問題の簡単な例をちょっと考えてみれば，この種の問題に固有の数学的な見通しを得ることができる．一般化座標として，系を構成する粒子の直交座標をとるのが適当である場合について考えよう．そうすると，運動エネルギーは速度成分の２乗だけしか含んでいない．一般化座標として，あらためて粒子の質量の平方根と直交座標の積を用いることにすれば，* 運動エネルギーは

$$T=\frac{\dot{\eta}_i\dot{\eta}_i}{2} \tag{6-12}$$

p.247
の形に書くことができる．それゆえこの場合には $T_{ij}=\delta_{ij}$ である．また，ω^2をλと書くと，同次方程式（６－10）は単に，

$$V_{ij}a_j=\lambda a_i \tag{6-13}$$

となる．これはちょうど第４章および第５章以来われわれに親しみ深い固有値問題の形式にほかならない．違っていることは，いまの場合には空間の次元が３ではなくnであるという点だけである．V_{ij}を$n\times n$行列$\mathbf{V}$の要素，a_iをn-次元ベクトル$\mathbf{a}$の成分と考えると，方程式（６－13）は，

$$\mathbf{Va}=\lambda\mathbf{a} \tag{6-14}$$

の形に書くことができるが，これは固有値方程式（４－79）によく似ている．同様に，このような条件の下では，行列方程式（６－11）は固有値λに対する永年方程式になる．

$\mathbf{V}$は対称行列であってその要素は実数であるから，固有値は実数である（第５－４節参照）．第４－６節で行ったように，n個の固有値に対応するn組のa_i（すなわちn個のベクトル$\mathbf{a}$）で行列$\mathbf{A}$を作れば，$\mathbf{A}$は相似変換$\mathbf{AVA}^{-1}$によって$\mathbf{V}$を対角行列に変換するはずである．さらにn個の固有ベクトル$\mathbf{a}$は互いに直交する（第５－４節）．したがって$\mathbf{V}$を対角型にする行列$\mathbf{A}$は直交行列でなければならない．

これらの結果は，T_{ij}が対角型であるような特別な場合に限らず成立する．す

---

*)　時おり，質量の重みをつけられた座標といわれる．

なわち，一般的な問題に対して同じような結果を証明することができる．実際，方程式(6－10)はある型の固有値方程式を表わしている．なぜなら，T_{ij}を行列$\mathbf{T}$の要素と考えると，(6－10)式は，

$$\mathbf{Va} = \lambda \mathbf{Ta}\,, \tag{6－15}$$

と書くことができる．この場合には，$\mathbf{V}$の固有ベクトル$\mathbf{a}$に対する効果は，普通の固有値問題のように単にベクトル$\mathbf{a}$をλ倍することではない．そのかわりに，固有ベクトル$\mathbf{a}$は，それに$\mathbf{V}$を作用させた結果が$\mathbf{a}$に$\mathbf{T}$を作用させた結果の定数倍になるようなものである．さて，方程式(6－15)を満足するλは，$\mathbf{T}$と$\mathbf{V}$とがエルミート行列である結果として，すべて実数であり，かつ実際正でなければならないことを示すことができる．また，固有ベクトル$\mathbf{a}$がある意味で互いに直交することも示される．その上，固有ベクトルから作られる行列$\mathbf{A}$は$\mathbf{T}$と$\mathbf{V}$の両方を対角型に変換する．そのとき$\mathbf{T}$は単位行列$\mathbf{1}$になり，$\mathbf{V}$は対角要素が固有値λであるような対角行列になるのである．

第5－4節で行ったのと同じように，$\mathbf{a}_k$を固有値方程式*

$$\mathbf{Va}_k = \lambda_k \mathbf{Ta}_k\,, \tag{6－16}$$

を満たすk番目の固有ベクトルを表わす1列行列としよう．λ_lに対する随伴方程式，すなわち転置された複素共役方程式は，

$$\mathbf{a}_l^\dagger \mathbf{V} = \lambda_l^* \mathbf{a}_l^\dagger \mathbf{T}\,, \tag{6－17}$$

p.248

の形である．ここで$\mathbf{a}_l^\dagger$は随伴ベクトル――すなわち$\mathbf{a}_l$の複素共役をとった1行行列――を意味し，$\mathbf{V}$と$\mathbf{T}$の行列が実対称である，言い換えるとエルミート行列であることが陽に使われている．(6－17)式に右から$\mathbf{a}_k$をかけ，(6－16)式に左から$\mathbf{a}_l^\dagger$をかけた式から引くと，左辺は零となって次式が得られる．

$$0 = (\lambda_k - \lambda_l^*)\mathbf{a}_l^\dagger \mathbf{Ta}_k\,. \tag{6－18}$$

$l = k$のとき，(6－18)式は特別な形，

---

*) (6－16)式でkについての和をとらないことは，ほとんどつけ加える必要はないであろう．実際この章では，和の規約は行列または任意の階数のテンソルの成分に対してのみ適用され，行列とテンソルそれ自身に対しては適用されない．

$$(\lambda_k - \lambda_k^*)\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{T}\mathbf{a}_k = 0\,, \qquad (6-19)$$

となる．(6−19)式の行列の積が実数であることは，その複素共役をとり，$\mathbf{T}$のエルミート性を使うことにより直ちに示される．しかしながら，行列の積が実数であるのみならず，正定符号(positive definite)であることを証明したい．このことを証明するために，$\mathbf{a}_k$を実の成分と虚の成分に分けて，

$$\mathbf{a}_k = \boldsymbol{\alpha}_k + i\boldsymbol{\beta}_k\,,$$

と書こう．そうすると行列の積は，

$$\mathbf{a}_k^\dagger \mathbf{T}\mathbf{a}_k = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k \mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_k + \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_k + i(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_k \mathbf{T}\boldsymbol{\beta}_k - \tilde{\boldsymbol{\beta}}_k \mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_k)\,, \qquad (6-20)$$

と書くことができる．虚部の項は$\mathbf{T}$の対称性のために零となる．ゆえに，すでに言われたように，行列の積は実である．さらに，(6−6)式の運動エネルギーは1列行列$\dot{\boldsymbol{\eta}}$によって，

$$T = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\boldsymbol{\eta}}}\mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\eta}}\,, \qquad (6-6')$$

のように書き換えられる．したがって(6−20)式の最初の2つの項は速度を表わす行列$\dot{\boldsymbol{\eta}}_k$がそれぞれ値$\boldsymbol{\alpha}_k$と$\boldsymbol{\beta}_k$を持つときの運動エネルギーの2倍となる．さて，運動エネルギーは，その物理的性質によって，任意の実数の速度に対して正定符号でなければならない．したがって，(6−19)式の行列の積は零になることはできない．このことから，固有値λ_kは実数でなければならないことが結論される．

固有値が実数であるので，方程式(6−16)から定められる固有ベクトルの成分a_{jk}の比はすべて実数でなければならない．もちろんa_{jk}のうち，ある特定の1つの値を任意に選んでも(6−16)式は成立するから，a_{ik}にはまだ不定さが残っている．しかしながら，この任意に選べる1つの成分は実であることを要求することができる．そうすればλ_kが実数であるということから，固有ベクトルの他のすべての成分が実数であることが保証されることになる(振動の振幅にはいってくる複素数の位相因子は，(6−9)式の中の因子Cの中に含められる)．さて，(6−16)式に左から$\tilde{\mathbf{a}}_k$をかけてλ_kについて解くと，

$$\lambda_k = \frac{\tilde{\mathbf{a}}_k \mathbf{V} \mathbf{a}_k}{\tilde{\mathbf{a}}_k \mathbf{T} \mathbf{a}_k}\,, \tag{6-21}$$

となる．この式の分母は速度 a_{ik} に対する運動エネルギーの２倍であって，固有ベクトルが実であることから，これは正定符号でなくてはならない．同じように，分子は座標 a_{ik} に対する位置エネルギーであって，つり合いにあるとき V がp.249極小であるということから，その和は正または零であることが要求される．分子も分母も負ではあり得ないし，分母は零ではあり得ないから，λ は常に有限でかつ正でなければならない（しかし零になることはあり得る）．λ は ω^2 であったことを思い出せば，λ が正であることは，振動数が実数であることに対応する．ポテンシャルが極小でないとすれば，（６－21）式の分子は負であるかも知れず，そのときには振動数は虚数となる．そうすると，η_i が時間と共に指数関数的に限りなく増大することになる．そのような運動は明らかに不安定である．これで，安定な運動に対してはポテンシャルが極小でなければならないということの，前に約束した数学的証明が得られたわけである．

さて，しばらくの間（６－18）式に戻ろう．固有値 λ_k およびベクトルの成分 a_{jk} が実数であるから，（６－18）式は，

$$(\lambda_k - \lambda_l)\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 0\,, \tag{6-18$'$}$$

と書くことができる．永年方程式の根がすべて異なっているとすれば，（６－18′）が成立するのは k と l が等しくなければ，行列の積が零のときに限ることになる．すなわち

$$\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 0\,, \qquad l \neq k \tag{6-22 a}$$

が成り立つ場合に限る．たびたび注意したように，a_{jk} の値は固有値方程式（６－10）から完全には決定されない．この不定さは，a_{jk} が，

$$\tilde{\mathbf{a}}_k \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 1\,, \tag{6-22 b}$$

を満足しなければならないという要求を置けば除くことができる．（６－22）のような式は $k=1,\cdots,n$ に対して n 個あって，それらの式から n 個の固有ベクトル $\mathbf{a}_k$ の

各々の中の任意にとり得る 1 つの成分の値が一義的に定められる*. もしすべての固有ベクトル$\mathbf{a}_k$で，成分a_{jk}の正方行列 **A**を作れば（第 4－6 節参照），（6－22 a とb）式の 2 つの式は，まとめて 1 つの行列方程式の形，

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{1}\,, \qquad (6-23)$$

に書くことができる.

もし永年方程式が重根を持てば，$\lambda_l = \lambda_k\ (l \neq k)$であるから，（6－22a）式を導き出すときに行った議論はだめになってしまう. この例外的な縮退（*degeneracy*）の場合は，後で議論することにして残しておこう.† 差し当りは，固有値方程式（6－10）式，および（6－22b)式を満足し，それゆえ(6－23）式を常に成立させる 1 組のa_{jk}を見出すことは常に可能であることだけで
p.250
十分である.（6－23）式は，行列 **B**が，

$$\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{B} = \mathbf{1}\,,$$

を満足するとき，直交行列であると言われることを思い出させる（（4－36)式参照). **A**についての条件と直交条件との間の関係を見るために，方程式（6－19）は慣性テンソルの固有ベクトルに対するこれに対応する方程式（（5－29)式参照），

$$(I_j - I_l)\mathbf{R}_l \cdot \mathbf{R}_j = 0\,,$$

によく似ていることに注目しよう. この関係式から，異なった固有ベクトルは直交している，すなわち，

$$\mathbf{R}_l \cdot \mathbf{R}_j = 0\,,$$

---

*) a_{jk}の不定さを取り除くためには（6－22b）式で十分であることは，次のように考えれば明らかになる. 今その大きさを決めようとしている任意の成分をa_{1k}であるとしよう. （6－10)式から，他のすべてのa_{jk}のa_{1k}に対する比が得られる. そうすると，（6－22 b）式は，

$$\sum_{i,j} T_{ij}\frac{a_{ik}}{a_{1k}}\frac{a_{jk}}{a_{1k}} = \frac{1}{a_{1k}^2}\,,$$

と書くことができる. 左辺は固有値方程式から完全に決定されるので，その値を計算すれば直ちにa_{1k}が得られる.

†) ここでの“縮退”(degeneracy）という（永年方程式の多重根を表わす）言葉の使い方は，後の章，特に第10章で与えられる意味とは異なっている.

であることが導かれた．もし，固有ベクトルの長さを規格化するように決めるならば（（6－22b）式に類似して），直交条件と規格化条件とは，すべての固有ベクトルを含む行列**X**は直交しなければならない（p.199ページの脚註参照），すなわち，

$$\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{X} = \mathbf{1},$$

でなければならない，と述べることによってまとめられるであろう．同様に（6－23）式は，固有ベクトル$\mathbf{a}_j$が直交しており，かつ大きさが1であるという条件と同等である．しかし，これは必ずしも直交座標でない特定のRiemann空間において成立する．

Riemann空間（*Riemannian space*）は，径路の長さの要素dsが，

$$ds^2 = g_{ik}dx_i\,dx_k, \tag{6－24}$$

で与えられるような空間である．ここでg_{ik}は空間の**計量テンソル**（*metric tensor*）**G**の要素である．このことに対応して，そのような空間での2つのベクトル **x**と **y** のスカラー積は，

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_i g_{ik} y_k = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{G}\mathbf{y}, \tag{6－25}$$

である．それで，ベクトル**x**の大きさの2乗は，

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{G}\mathbf{x}, \tag{6－26}$$

である．直交座標に対しては，計量テンソルは明らかに単位行列**1**である．一般に**G**は直交曲線座標（curvilinear orthogonal coordinates）に対しては対角型である（3次元の球座標の例を参照）．

運動エネルギー，（6－6′）式は2**T**が配置空間での速度ベクトルの2乗であるようなものである．この速度ベクトルは，**Tが計量テンソルであるような配置空間におけるものである．** 同様に，（6－23）式は，またその成分の方程式（6－22a,b）は，そのような空間で，固有ベクトル$\mathbf{a}_k$が直交しており，また大きさ1を持つように規格化されていることを述べている．

p.251
第4章において，行列**C**の行列**B**による**相似変換**（*similarity* transformation）を，

$$\mathbf{C}' = \mathbf{BCB}^{-1},$$

で定義した（（4－41）式を参照）．ここでわれわれは，それに関連のある概念として**C**の**A**による**合同変換**（*congruence* transformation）を次の関係によって導入する．

$$\mathbf{C}' = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{CA}. \qquad (6-27)$$

もし**A**が直交行列であれば$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}$であるから，これら2つの変換の間には本質的な違いはない（$\mathbf{A}^{-1}$を**B**と書いてみればわかるであろう）．それゆえ（6－23）式は**T**が**A**による合同変換によって対角行列，特に単位行列に変換されることを表わすものと解釈することができる．

要素 $\lambda_{lk} = \lambda_k \delta_{lk}$ をもつ対角行列 λ を導入すれば，固有値方程式（6－16）は次のように書くことができる．

$$V_{ij}a_{jk} = T_{ij}a_{jl}\lambda_{lk}.$$

これは，行列の記号で書けば，

$$\mathbf{VA} = \mathbf{TA}\boldsymbol{\lambda}, \qquad (6-28)$$

となる．左から$\tilde{\mathbf{A}}$を掛けると（6－28）式は，

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{VA} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{TA}\boldsymbol{\lambda},$$

の形になるが，これは（6－23）式によって，

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{VA} = \boldsymbol{\lambda}, \qquad (6-29)$$

となる．この最後の結果（6－29）式は，**V**が**A**による合同変換によって，対角要素が λ_k であるような対角行列に変換されることを表わしている．

このように，行列**A**は**T**と**V**の両方を同時に対角化にする．**T**が配置空間の計量テンソルであるという解釈を思い出せば，この対角化の過程に対して次のような意味を与えることができる．すなわち**A**は，計量テンソル**T**を持つ斜交軸から，直交軸への1次変換の行列である．変換された軸が直交軸であることは，その計量テンソルが**1**であることからわかる．同時に，新しい座標軸は互

いに垂直な**V**の**主軸**(*principal axis*)であり，したがって，変換された座標系において行列**V**は対角型である．このようにして，微小振動の基本振動数を求める全過程は，第5章で述べた**主軸変換**(*principal axis transformation*)の１つの特別な型のものである.*

後残っているのは，永年方程式が多重根を持つ場合を考えることだけである．このような場合は，実際的な問題におけるよりもむしろ数学的な理論の方が厄介である．１つあるいはそれ以上の重根があれば，固有値方程式の中で独立な
p.252 ものの数が，固有ベクトルの成分の比を決定するのにさえも足りない，ということが見出される．このようにして，例えば λ が２重根であれば，成分 a_j のうちのどれか２つは任意に選ぶことができ，残りの成分が固有値方程式から定められる．このことを説明するために，２次元の系を考えよう．このとき永年方程式は，

$$\begin{vmatrix} V_{11}-\lambda T_{11} & V_{12}-\lambda T_{12} \\ V_{12}-\lambda T_{12} & V_{22}-\lambda T_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

すなわち，

$$(V_{12}-\lambda T_{12})^2-(V_{11}-\lambda T_{11})(V_{22}-\lambda T_{22})=0,$$

となる．さて，行列要素が，

$$\frac{V_{12}}{T_{12}}=\frac{V_{11}}{T_{11}}=\frac{V_{22}}{T_{22}}=\lambda_0, \qquad (6-30)$$

を満足するようなものであったとしよう．そうすると，永年方程式は次のように書くことができる．

$$(T_{12}^2-T_{11}T_{22})(\lambda_0-\lambda)^2=0.$$

この方程式は，λ_0 が永年方程式の２重根であることを示している．ところがこの根に対する固有値方程式(６－10)は，

---

*) 主軸変換の別の幾何学的解釈は，6—3 節において規準座標との関係によって与えられる.

$$(V_{11}-\lambda_0 T_{11})a_1+(V_{12}-\lambda_0 T_{12})a_2=0,$$
$$(V_{12}-\lambda_0 T_{12})a_1+(V_{22}-\lambda_0 T_{22})a_2=0,$$

であって，（6－30）式の条件から，a_i の係数はすべて恒等的に零になる．そうすると，a_1，a_2 にどんな値を与えても，固有値方程式は満足される．規格化の条件（6－22b）式を用いたとしても，永年方程式の 2 重根に対しては ∞^1 だけの固有ベクトルがあることになる．同じように 3 重根に対しては ∞^2 の固有ベクトルがあり，以下同様である．

許されるベクトルの組が無限個ある場合，その中から固有ベクトルの組を勝手に選び出してきても，それらは一般には直交しないであろう．しかしながら，許されたベクトルから互いに直交するベクトルの対をつくることは常に可能であって，これらを用いて直交行列 **A** を作ることができる．簡単のために，2 重根の場合に対してこの手続きを実行してみよう．$\mathbf{a}'_k$，$\mathbf{a}'_l$ を，与えられた 2 重根 λ に対する許された任意の 2 つの固有ベクトルとし，それらは（6－22b）式を満足するように規格化されているものとする．そうすると，$\mathbf{a}'_k$ と $\mathbf{a}'_l$ の任意の 1 次結合はまた，λ に対する 1 つの固有ベクトルになっているであろう．そこで，

$$\mathbf{a}_l=c_1\mathbf{a}'_k+c_2\mathbf{a}'_l, \qquad (6-31)$$

によってベクトル $\mathbf{a}_l$ を作り，$\mathbf{a}_l$ が $\mathbf{a}'_k$ に直交するように定数 c_1，c_2 を定めることを考えよう．直交条件（6－22a）式より，

$$\tilde{\mathbf{a}}_l\mathbf{T}\mathbf{a}'_k=c_1+c_2\tilde{\mathbf{a}}_l\mathbf{T}\mathbf{a}'_k=0,$$

が得られる．ここで $\mathbf{a}'_k$ の規格化条件が使われた．上の関係から，c_1 と c_2 との比が，

$$\frac{c_1}{c_2}=-\tilde{\mathbf{a}}_l\mathbf{T}\mathbf{a}'_k\equiv-\tau_l, \qquad (6-32)$$

p. 253
で与えられなければならないことが導かれる．さらに $\mathbf{a}_l$ が規格化されていることを要求すると，2 つの係数に対する他の条件が与えられる．それは（6－32）式で定義される τ_l を用いれば次の形になる．

$$\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_l = 1 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 \tau_l . \qquad (6-33)$$

この2つの式から係数 c_1, c_2, したがって $\mathbf{a}_l$ が決定される．$\mathbf{a}_l$ と $\mathbf{a}_k \equiv \mathbf{a}'_k$ はいずれも，他の異なる固有値に対する固有ベクトルと自動的に直交している．なぜなら，異なる固有値に対しては，(6−18′)式に基づく議論がそのまま成り立つからである．それゆえ，(6−23)式を満足する行列 $\mathbf{A}$ を形づくる n 個の固有ベクトル $\mathbf{a}_j$ の組が得られる．

もっと高い多重度をもつ根に対しても，同じ様な手続きを行うことができる．もし λ が m 重根であるとすれば，そのときには，λ に対応する任意の m 個の固有ベクトル $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_m$ の1次結合から，規格化され，かつ直交する固有ベクトルを作ることができる．すなわち，第1の〝規格直交〟固有ベクトル $\mathbf{a}_1$ としては $\mathbf{a}'_1$ の定数倍を選び，次に $\mathbf{a}_2$ としては $\mathbf{a}'_1$ と $\mathbf{a}'_2$ の1次結合をとって，$\mathbf{a}_1$ に直交し，かつ規格化されているように1次結合の係数を定め，以下同じように進むのである．このような方程式で定めるべき定数は，初めの m 個の整数の和，すなわち $1+2+\cdots m = \frac{1}{2}m(m+1)$ 個だけある．ところが規格化の要求が m 個の条件を与え，また直交条件が $\frac{1}{2}m(m-1)$ 個あるから，これらを合わせるとちょうど定数を一義的に定めるのに十分なだけの条件があることになる．

永年方程式が多重根を持つ場合に直交する固有ベクトルの組を作り上げるこの方法は，任意の関数の組から直交関数列を作る Gram-Schmidt の方法とよく似ている．幾何学的な言葉でいえば，この方法はまた第5章で慣性テンソルが多重固有値を持つ場合に行ったのと同じ手続きである．例えば，2重根に対する固有ベクトルの成分が不定であるということは，1平面内のすべてのベクトルが固有ベクトルであるということを意味する．この平面内の任意の2つの垂直な方向を新しい主軸として選べば，この軸方向の単位ベクトルが直交行列 $\mathbf{A}$ を作るのに用いられる固有ベクトルになる.*

*) 200ページの脚注を見よ．

6－3　自由振動の振動数および規準座標

前節のいくらか長たらしい議論によって，運動方程式を満足する（6－9）式のような振動型の解は，単に1つの振動数だけではなく，一般には n 個の振動数の組 ω_k を持っているということが示された．それゆえ，運動方程式の完全な解は，すべての許される振動数を持つ振動の重ね合わせである．このように，系をつり合いの位置からわずかに変位させてから離せば，系はつり合いの位置のまわりに振動数 $\omega_1,\ldots,\omega_n$ を持つ微小振動を行う．こういうわけで，永年方程式の根はしばしば系の**自由振動**（*free vibration*）の振動数，あるいは**共鳴振動数**（*resonant frequencies*）と呼ばれる．

p. 254

さて上に述べたことから，運動方程式の一般解は，添字 k についての和として，次のように書くことができる．

$$\eta_i = C_k a_{ik} e^{-i\omega_k t}. \qquad (6-34)$$

ここで C_k は各々の共鳴振動数に対する，複素数の尺度因子である．このように書くと，永年方程式の解 λ_k の各々に対して，2つの共鳴振動数 $+\omega_k$ と $-\omega_k$ があるのに，一方だけしかとっていないと反論されるかも知れない．これら2つの振動数に対しては，固有ベクトル $\mathbf{a}_k$ は同じであるが，尺度因子 C_k^+ と C_k^- はちがっていると考えることができる．そうすると一般解は，

$$\eta_i = a_{ik}(C_k^+ e^{+i\omega_k t} + C_k^- e^{-i\omega_k t}), \qquad (6-35)$$

ととるべきである．けれども実際の運動は，複素数の解の実数部分である，ということを思い出さなければならない．そうすると，（6－34）式も（6－35）式も，実部をとれば，

$$\eta_i = f_k a_{ik} \cos(\omega_k t + \delta_k), \qquad (6-36)$$

の形に書くことができる．ここで，振幅 f_k および位相 δ_k は初期条件から決定される．したがって解（6－34）および（6－35）式はいずれも実際の運動を表わしているのであるが，いうまでもなく前者の方が取り扱いに便利である．

尺度因子 C_k を初期条件から定めることは，$\mathbf{A}$ が直交性を持っているために非

常に容易になる．$t=0$ においては，(6－34)式の実部は，

$$\eta_i(0) = \mathrm{Re}\, C_k a_{ik}\,, \qquad (6-37)$$

となる．ここでReは実部を表わす．同じように，速度の初期値は，

$$\dot{\eta}_i(0) = \mathrm{Im}\, C_k a_{ik}\omega_k\,, \qquad (6-38)$$

である．$\mathrm{Im}\, C_k$ は C_k の虚部を示す．これら $2n$ 個の式から，n 個の定数 C_k の実部と虚部を計算することができる．例えば，(6－37)式を解くために，(6－37)式を1列行列 $\boldsymbol{\eta}(0)$ と $\mathbf{C}$ で，

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{A}\, \mathrm{Re}\, \mathbf{C}\,, \qquad (6-37')$$

と書く．(6－37′)式に左から $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}$ を掛け，(6－23)式を用いると，$\mathrm{Re}\,\mathbf{C}$ に対する解，

$$\mathrm{Re}\, \mathbf{C} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\boldsymbol{\eta}(0)\,,$$

が得られる．または，l 番目の成分をとれば，

$$\mathrm{Re}\, C_l = a_{jl} T_{jk} \eta_k(0) \qquad (6-39)$$

が得られる．同じようにして，尺度因子 C_l の虚部は，

$$\mathrm{Im}\, C_l = \frac{1}{\omega_l} \sum_{j,k} a_{jl} T_{jk} \dot{\eta}_k(0)\,, \qquad (6-40)$$

p. 255
となる.* このように，(6－39)と(6－40)式によって，複素数因子 C_l（したがって振幅と位相）を，初期条件と行列 $\mathbf{A}$，$\mathbf{T}$ を用いて直接計算することができる．

各々の座標についての解(6－34)式は，一般には永年方程式を満たす振動数 ω_k のすべてについての単振動の和である．もし振動数のすべてが共通の尺度で測れない(incommensurable)，すなわち有理数の比をなしていないならば，η_i は決してその初期値を繰り返してとらない．ゆえに η_i は1つの時間の周期関数では表わせない．しかしながら，η_i から，すべてが時間の1重周期関数で

*) 繰り返された添字 l については和をとらないので，j と k についての和の記号が陽に使われた．

あるような新しい一般化座標の組――**規準座標**（*normal coordinates*）として知られている1組の変数――へ変換することができる．

初めにとった座標η_iと次の関係で結ばれている新しい座標の組ζ_jを定義する．

$$\eta_i = a_{ij}\zeta_j \,. \tag{6－41}$$

または，1列行列$\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{\zeta}$で表わせば，

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta} \,, \tag{6－41′}$$

と定義できる．位置エネルギー（6－4）式は，行列を用いて書けば，

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{V}\boldsymbol{\eta} \,, \tag{6－42}$$

となる．ところで，転置行列$\tilde{\boldsymbol{\eta}}$（これは1行行列である）と$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$の関係は，

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \widetilde{\mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}} = \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\tilde{\mathbf{A}} \,,$$

で与えられる．したがって，位置エネルギーは，

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{V}\mathbf{A}\boldsymbol{\zeta} \,,$$

の形になる．ところが，$\mathbf{A}$は合同変換によって$\mathbf{V}$を対角型にするから（（6－29）式参照），位置エネルギーは次のように簡単になる．

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{2}\omega_k^2\zeta_k^2 \,. \tag{6－43}$$

運動エネルギーの方は，新しい座標ではもっと簡単な形になる．速度は座標と同じように変換されるから，（6－6′）式で与えられたTは，

$$T = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\boldsymbol{\zeta}}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\zeta}} ,$$

と変換され，これは（6－23）式によって，

$$T = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\boldsymbol{\zeta}}}\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{1}{2}\dot{\zeta}_i\dot{\zeta}_i \tag{6－44}$$

p.256
となる．新しい座標においては，（6－43）と（6－44）式からわかるように，位置エネルギーも運動エネルギーも，2乗の項の和の形に書け，異なる座標

あるいは速度の積を含まない．もちろんこの結果は，**A**が主軸変換を引き起こすということを別な形で言い表わしたものである．慣性テンソルの主軸変換というのは，特に慣性モーメントを2乗の項の和の形にするために，工夫されたものであったことを思い出そう．そのときには，新しい軸が慣性楕円体の主軸であった．ここで取り扱った問題では，位置エネルギーが（慣性モーメントと同じように）2次形式であって，その両方が**A**によって同時に対角化されたのである．こういうわけで，ここで用いられた主軸変換は，**2つの2次形式を同時に対角化**するというよく知られた代数的な方法の特別な1例である．

TとVの主軸変換を調べる別の方法がある．この方法は，第5章で述べた慣性テンソルを対角化する手続きに一層近いやり方である．それは計算の過程を簡単にはしないが，なぜ2つの2次形式を同時に対角化できるのか，そしてなぜ3つの2次形式では一般に同時に対角化できないのか，を説明するのに役立つ．行列**T**は，ちょうど慣性テンソル**I**と同じように実で対称である．η空間をn次元の直交空間であると考えるならば，**T**が対角型になるような新しい直交座標系**y**への実の直交変換**B**を見出すことができて，

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta},$$

となる．行列**B**は**T**を相似変換によって，対角行列**C**に変換する．すなわち，

$$\mathbf{BTB}^{-1} = \mathbf{BT\tilde{B}} = \mathbf{C},$$

である．逆変換は，

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{\tilde{B}y}, \qquad \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{yB},$$

であるから，運動エネルギーは，

$$2T = \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}\mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\tilde{\mathbf{y}}}\mathbf{BT\tilde{B}}\dot{\mathbf{y}} = \dot{\tilde{\mathbf{y}}}\mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} = C_i\dot{y}_i^2,$$

のように変換される．予期されたように，新しい座標軸は運動エネルギー楕円体の主軸である．任意の有限な速度に対して運動エネルギーは決して零になることはできない，すなわち，正定符号なので，C_iは常に零より大である．したがって，常に，

$$z_i = y_i\sqrt{C_i} \qquad (\,i\text{ についての和はとらない}), \qquad (6-45)$$

で定義される新しい座標 z_i を導入することができる．これらの新しい座標を用いると，運動エネルギーは，

$$2T = \dot{z}_i\dot{z}_i = \tilde{\dot{\mathbf{z}}}\mathbf{1}\dot{\mathbf{z}}\,,$$

となる．座標変換（6－45）式は，座標軸の回転は何も含んでいない．それは各 y_i 軸の方向での尺度の変化を与えるのみである．実質的になされたことは，それぞれの主軸の目盛を引き伸ばしたり，押し縮めたりして，運動エネルギー楕円体が球になるようにすることである！

p. 257

２つの相続く座標変換によって，一般には $\mathbf{V}$ は対角化されないが，位置のエネルギーは，

$$2V = \tilde{\mathbf{z}}\mathbf{D}\mathbf{z}\,,$$

の形となる．ここで $\mathbf{D}$ は対称な実行列である．したがって，実の直交行列 $\mathbf{F}$ による３番目でかつ最後の座標変換，

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{F}\mathbf{z}\,,$$

を見出すことができる．この座標変換による対角行列 $\boldsymbol{\lambda}$ への相似変換によって，$\mathbf{D}$ を対角化することができ，

$$2V = \tilde{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\zeta} = \lambda_i\zeta_i^2\,,$$

となる．この最後の座標の回転により，運動のエネルギーの形は変わらない．なぜなら，球は回転された系においても常に対角型だからである．このようにして，そのうち１つは正定符号である２つの２次形式の同時対角化を行うための技巧は，正定符号２次形式が球を定義するような座標系を見つけることである．そのときには２次形式に対して，すべての方向が主軸となるからである．さて，これで，一般に３つの２次形式が，なぜ同時に対角化できないのかが明らかとなる．最後の回転は，３つのうちの１つを対角化するのに使われるが，もう１つ残っている２次形式はなお非対角型のままである．このような残念な事情が，散逸の効果を考えに入れるときには重要になってくるのである．

ζ_i 座標系の性質に戻ってくる前に，運動方程式も新しい座標の導入によって簡単化されることを注意しておこう．すなわち，新しいラグランジアンは，

$$L=\frac{1}{2}(\dot{\zeta}_k\dot{\zeta}_k-\omega_k^2\zeta_k^2), \tag{6-46}$$

となり，したがって ζ_k に対する運動方程式は次のようになる.

$$\ddot{\zeta}_k+\omega_k^2\zeta_k=0. \tag{6-47}$$

この方程式の解は直ちに得られて，

$$\zeta_k=C_k e^{-i\omega_k t}, \tag{6-48}$$

である．もちろんこれは，（6－34）または（6－41）式から直接に知ることもできた結果である．このように，新しい座標の各々は，ただ**1つ**の共鳴振動数だけを含む1重周期関数である．それで，すでに述べたように ζ を系の**規準座標**[1]（*normal coordinates*）と呼ぶのが慣習になっている.

各規準座標はただ1つの振動数を持つ系の振動に対応しており，これらの個々の振動は**振動の規準型**[2]（*normal mode of vibration*）と呼ばれる.各々の規準型の振動においては，すべての粒子は同じ振動数，同じ位相で振動し，そ
p.258
れらの振動の相対的な振幅は，行列要素 a_{ik} によって決定される.[*] 全体の運動は，C_k の中に含まれる適当な振幅および位相因子に重みをつけて加え合わせた，規準振動の合成として作り上げられる.

全体の運動において，基本振動数の倍振動数が現われないのは，本質的には振動の振幅が小さいとして取り扱っているためである．そのような仮定をしたために，ポテンシャルを，単振動の特徴である2次形式の形に表わすことができたのである．このことは，規準座標への変換によってはっきりと示されている．なぜなら，規準座標で表わすと，系のラグランジアン（6－46）式は，振動数 ω_k を持つ調和振動子に対するラグランジアンの和になっていることがわかるからである．このように，微小振動に対する全体の運動は，いろいろな調和振動子が，異なった強度および位相を持って励起されることによって得られる

1）標準座標ともいわれる.
2）規準振動，標準振動といわれることもある.
*）もし2つの a の符号が反対であれば，それらの粒子の振動はちょうど π だけ位相がずれている.

ものと考えることができる.[*]

6－4　直線状の3原子分子の自由振動

共鳴振動数および規準振動を求める手法を説明するために，直線状の対称な3原子分子[1]のモデルを詳しく考えてみよう．この分子は，つり合いの配置において，質量 m の原子が質量 M の原子の両側の対称な位置にある（図6－2参照）．3個の原子はすべて1直線上にある．つり合いの状態における原子の間隔を b としよう．簡単のために，まず分子軸に沿う振動だけを考えよう．原子間のポテンシャルは，実際には複雑なものであるが，それを近似的に3個の原子を結ぶ，力の定数 k を持つ2つのばねで表わそう．明らかに，直線状の3個の原子の位置を示す，3つの座標がある．これらの座標を用いれば，位置エネルギーは，

$$V=\frac{k}{2}(x_2-x_1-b)^2+\frac{k}{2}(x_3-x_2-b)^2,$$

で表わされる．さて，つり合いの位置に対する相対座標，

$$\eta_i=x_i-x_{0i},$$

を導入しよう．ここで，

$$x_{02}-x_{01}=b=x_{03}-x_{02},$$

である．そうすると，位置エネルギーは，

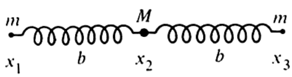


図6－2
対称な直線状3原子分子のモデル．

＊）同じような考え方が，電磁場の量子化においても現われることを後の参考のために注意しておこう．その場合には，調和振動子の振動数は光子の振動数であるとみなされ，また励起された振動子の振幅は，量子化された離散的な〝占拠数〞（occupation number）── それぞれの振動数をもつ光子の数 ── であるとみなされるのである．

1）例えば CO_2 分子のようなものである．特に CO_2 分子は炭酸ガス・レーザーの理論との関係において興味のあるものである．レーザー理論については文献を参照せよ．

p.259

$$V=\frac{k}{2}(\eta_2-\eta_1)^2+\frac{k}{2}(\eta_3-\eta_2)^2,$$

あるいは,

$$V=\frac{k}{2}(\eta_1^2+2\eta_2^2+\eta_3^2-2\eta_1\eta_2-2\eta_2\eta_3), \tag{6-49}$$

と書き直すことができる．それゆえ，行列**V**は,

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}, \tag{6-50}$$

の形を持っている．運動エネルギーはさらに簡単な形,

$$T=\frac{m}{2}(\dot{\eta}_1^2+\dot{\eta}_3^2)+\frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2, \tag{6-51}$$

であるから，**T**行列は対角型であって,

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \tag{6-52}$$

で表わされる．これら2つの行列を結びつければ，永年方程式,

$$|\mathbf{V}-\omega^2\mathbf{T}|=\begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix}=0, \tag{6-53}$$

が得られる．行列式を展開して直接計算すると，次のような，ω^2に対する3次方程式が得られる．

$$\omega^2(k-\omega^2 m)(k(M+2m)-\omega^2 Mm)=0. \tag{6-54}$$

この方程式の解は明らかに,

$$\omega_1=0, \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_3=\sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)} \tag{6-55}$$

である．第1の零という固有値すなわち $\omega_1=0$ は,何か意外なことであって，一見驚くべきことのようにさえ思われるかも知れない．そのような解は，振動

運動にはまったく対応しないのである．なぜなら，$\omega_1=0$に対する規準座標の運動方程式は，

$$\ddot{\zeta}_1=0$$

であって，これは一様な並進運動を表わしているからである．しかし，まさにこのことが困難を解決する鍵なのである．零という振動数は，分子を剛体的に p. 260 分子軸に沿って動かしても，位置エネルギーが変らないためにでてきたものである．これは，前に述べた中立なつり合いの１例である．そのような運動に対しては，復元力が零であるから，有効〝振動数″も零でなければならない．われわれは，分子が振動に対して３つの自由度を持つと仮定したが，その中の１つは実は剛体的な自由度だったのである．

共鳴振動数が零になることに関連して，多くの興味ある議論をすることができる．（６－21）式からわかるように，ωが零という値をとり得るのは，位置エネルギーが正ではあるが正定符号ではないとき，すなわち，すべてのη_iが零でなくてもVが零になり得るときに限る．（６－49）式のVを調べてみると，事実正定符号ではなく，すべてのη_iが等しいとき（すなわち一様な並進のとき）には零になることがわかる．

ここで見出された零という振動数は，われわれの興味を持つ振動の振動数としては何の重要性もないから，多くの場合初めから問題を，このような根が現われないように言い表わしておく方が望ましい．そうするためには，この問題では質量中心が原点に静止しているという条件，あるいは拘束を課すのが最も簡単である．この条件は，

$$m(x_1+x_3)+Mx_2=0, \qquad (6-56)$$

と書くことができる．そうすると，（６－56）式を用いてVおよびTから座標の１つを消去することができ，２自由度の問題に帰着させることができる（この章の演習問題３を参照せよ）．

原子の運動が，分子軸の方向だけに限られている場合には，一様な剛体的な運動としてはただ１つの型のものだけが許される．しかしながら，３次元空間のすべての方向の振動を考えるような，もっと一般的な問題の場合には，剛体

的な運動の自由度の数は増加して，一般には6になるであろう．そのときには，分子は3つの軸の方向に沿って一様な並進運動をすることができ，また3つの軸のまわりに一様に回転することができる．それゆえ，一般に n 自由度の系では，振動数のうち6個は零になり， $n-6$ 個が真の振動の振動数になるであろう．この場合にもまた座標に対して，線運動量および角運動量保存の条件を課すことによって，前もって自由度の数を減らしておくことができる．

剛体的な運動のほかに，ポテンシャルの1次および2次の導関数がつり合いの位置で零になるような場合にも，零という共鳴振動数が現われることが指摘された．この時には，もし4次の導関数が零でなければ（つり合いが安定であるとすれば3次導関数はつり合いの位置で零にならなければならない），微小振動が起り得るが，その振動はもはや単振動ではないであろう．それゆえ，そのような場合には微小振動を取り扱う普通の方法は使えない．しかし幸いにも，そのようなことはそれほど頻繁に起こるわけではない．

さて元の問題にかえって，他の共鳴振動数について調べよう．まず ω_2 は，力の定数が k であるようなばねに吊された質量 m の質点の運動に対するよく知られた振動数であることがわかる．それゆえ，この振動数では，中心の原子は静止したまま両端の原子だけが振動することが予想される．第3の振動数 ω_3 を持
p.261
つ振動において初めて，質量 M の原子が振動にあずかることができるようになる．このような予想は，3つの規準振動に対する固有ベクトルを調べて見れば確かめられる．

各振動数に対する固有ベクトルの成分 a_{ij} は，連立方程式

$$\begin{array}{rcrcrl}(k-\omega_j^2 m)a_{1j} & & -ka_{2j} & & & =0 \\ & -ka_{1j} & +(2k-\omega_j^2 M)a_{2j} & & -ka_{3j} & =0 \\ & & -ka_{2j} & + & (k-\omega_j^2 m)a_{3j} & =0\end{array} \qquad (6-57)$$

および規格化の条件，

$$m(a_{1j}^2+a_{3j}^2)+Ma_{2j}^2=1, \qquad (6-58)$$

によって決定される．$\omega_1=0$ に対しては（6－57）式の1番目と3番目の式か

ら，固有ベクトルの３つの成分がすべて等しい，すなわち $a_{11}=a_{21}=a_{31}$ であるということが直ちにわかる．このことはまさに，この運動が並進運動であるということから予想されたことである（図6－3aを参照せよ）．そうすると，各 a_{j1} の値は規格化の条件から決定されて，

$$a_{11}=\frac{1}{\sqrt{2m+M}},\qquad a_{21}=\frac{1}{\sqrt{2m+M}},\qquad a_{31}=\frac{1}{\sqrt{2m+M}},\tag{6－59a}$$

となる．第２の規準振動に対しては $(k-\omega_2^2m)$ が零になる．そして（6－57）式から直ちに，$a_{22}=0$（これは予想されたことである），および $a_{12}=-a_{32}$ が得られる．これらの数値は（6－58）式から次のように決定される．

$$a_{12}=\frac{1}{\sqrt{2m}},\qquad a_{22}=0,\qquad a_{32}=-\frac{1}{\sqrt{2m}}.\tag{6－59b}$$

この規準振動では，（線運動量が保存されるために当然そうでなければならないように）中心の原子は止っており，外側の２個の原子はちょうど反対の位相で振動する．図6－3bを参照せよ．最後に $\omega=\omega_3$ のときには，（6－57）式の１番目，３番目の式から $a_{13}=a_{33}$ でなければならないことがわかる．残りの計算は前の２つの場合ほど簡単にはいかない．ここでは最後の結果だけを書いておけば十分であろう．

$$a_{13}=\frac{1}{\sqrt{2m\left(1+\dfrac{2m}{M}\right)}},\quad a_{23}=\frac{-2}{\sqrt{2M\left(2+\dfrac{M}{m}\right)}},\quad a_{33}=\frac{1}{\sqrt{2m\left(1+\dfrac{2m}{M}\right)}}.\tag{6－59c}$$

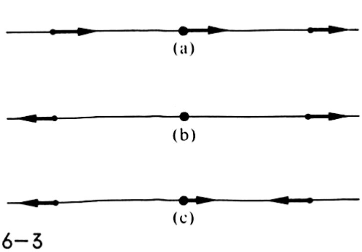


図6－3
縦振動をする直線状３原子分子の規準振動．

p. 262
この場合には，外側の２個の原子は同じ振幅で振動するが，中央の原子はこの２個の原子と反対の位相でかつ異なる振幅を持って振動する．図６－３ｃを参照せよ．これらの分子の，剛体的な並進運動を含まない，どのような一般的な縦振動も，振動数 ω_2 , ω_3を持つ規準振動の１次結合として表わされるであろう．もちろん，各規準振動の振幅および相互の相対的な位相は，初期条件から決定される（演習問題５参照）．

今までわれわれは，分子軸に沿う振動だけについて話してきた．ところが実際の分子では，分子軸に垂直な規準振動も存在するであろう．いうまでもなく，規準振動の完全な組を決定することは，縦振動の規準振動だけを求めるよりも困難である．なぜなら，あらゆる方向への一般的な運動は９個の自由度に対応するからである．その手順は難かしくはないけれども，必要な代数計算は，自由度の数が増すと共に急速に複雑になってきて，到底ここでその詳細を説明することはできない．しかし，一般的な原理に基づいて定性的な議論をすることは可能である．そして，完全な解から得られる結論の大部分は前もって予言することができる．

一般的な問題では，共鳴振動数のうちのいくつかは，剛体的な運動の可能性に対応して零になるであろう．直線状の分子では，剛体的な並進には３つの自由度があるが，剛体的な回転には２つの自由度しかない．明らかに分子軸のまわりの回転は無意味であって，剛体的な運動の型としては現われないであろう．それゆえ，直線状の分子の場合には，９－５＝４個の真の振動の型があることになる．このうち２つはすでに調べた縦振動の型であるから，分子軸に垂直な型は２つだけあり得ることになる．ところが，軸のまわりの分子の対称性から，軸に垂直なこれら２つの振動は縮退していなければならないということが示される．すなわち，ｙ-方向の振動とｚ-方向の振動を区別するものは何もなく，したがってこの２つの振動数は等しくなければならない．この場合には，２つの振動が縮退しているために生じる，固有ベクトルの余分の不定さは，分子軸に垂直なすべての方向が同等であるという事実の中に現われている．すなわち，分子軸に垂直な平面内の任意の２つの直交する軸を，縮退した２つの振動の方向に選ぶことができる．軸に垂直な平面内での原子の一般的な運動は，この２

つの縮退した規準振動の振幅と，相対的な位相に関係するであろう．両方の規準振動が励起されており，かつ位相が正確に合っていれば，原子はつり合いの位置を通る1直線上を運動する．しかし，もし位相がずれているならば，合成された運動はちょうど2次元の等方振動子におけるように，楕円形のLissajousの図形を描く，そのときには，この2つの規準振動は振動ではなく，むしろ1つの回転を表わしている．

分子の対称性から，両端の原子の振幅が同じでなければならないことは明らかである．計算を完全に遂行してみれば，両端の原子は同じ方向にLissajousの図形を描くことが示される．それゆえ，角運動量が保存されるためには，中心の原子は反対の方向に回転しなければならない．図6−4には，縮退した振動の位相が90°だけずれている場合の運動が示してある．

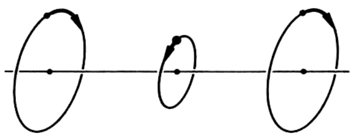


図6−4
対称な3原子分子の縮退した振動の型．

分子の複雑さが増すにつれて，永年行列式のサイズが大変大きくなり，規準
p. 263
振動の振動数と振幅を求めることはかなり大きな問題になる．しかしながら，直線状3原子分子のように簡単な場合でさえも，振動において予期される対称性を調べることは，計算を大いに簡単化することを見た．複雑な分子の振動数を求めるときに必要とされる労力を軽減するために，その分子に固有な対称性を利用することに，かなりの数学的な工夫がなされてきた．大きな永年行列式を，別々に対角型にすることのできる，いくつかのより小さい永年行列式に因数分解するのに対称性の群の理論が使われて大成功を収めた．しかし，そのような手のこんだ数学的な取り扱いは，数値計算が困難で繁雑であるときに，より一層適切であることが指摘された．現代のコンピュータの演算の速さと記憶容量の大きさを考慮すると，このような対称性を使わずに，直接的に計算する

方が長い目で見ればより容易でかつ正確であるかも知れない．今日では大きな行列の固有値問題を解く高速で精密なルーチンが，中規模程度の科学計算用コンピュータにさえも備えられている．したがって，問題を定式化するのに，質量で重みをつけられた直交座標を使って（323 ページを見よ），もっと強引に計算する方法へ向う傾向が生じてきた．その時には，分子振動に対する運動エネルギー楕円体はすでに球であり，振動の規準型を求めることは，位置エネルギーを対角型にすることに帰着される．化学物理学における問題に対して，今後分子振動の振動数を計算するときには，恐らくこのような方法がとられるようになるであろう．

6−5　強制振動および散逸力の影響

自由振動は，系を初めつり合いの位置から変位させ，そのまま自然に振動させるときに起こる．しかしながら，系が，$t=0$ において外部駆動力によって振動を起こされ，その駆動力がそれから後ずっと作用し続けるという場合がしばしばある．そのような**強制振動**（*forced oscillation*）の振動数は，共鳴振動数ではなく，外部駆動力の振動数によって決まる．けれども，強制振動の振幅を得るためには，やはり規準振動は重要であって，自由振動から得られる規準座標を用いることによって，問題は非常に簡単化される．

さて，座標 η_j に対応する一般化力の成分を F_j とすれば，（1−49）式によって，規準座標 ζ_i に対応する一般化力 Q_i は，

$$Q_i = a_{ji}F_j, \qquad (6-60)$$

で与えられる．そうすると，規準座標で書いた運動方程式は，次のようになる．

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2\zeta_i = Q_i. \qquad (6-61)$$

p.264
方程式（6−61）は n 個の非同次線形微分方程式の組であって，それらは Q_i が時間の関数として知られておりさえすれば解くことができる．その解は自由振動の場合ほど簡単ではないであろうが，規準座標はやはり分離可能な座標である，という利点を持っている．そして各々の方程式はただ1つの座標だけしか含んでいないことに注意しよう．

外部駆動力が時間に対して正弦的に変わる場合がしばしばある．例えば，音響学の問題では，駆動力は系に入射する音波の圧力から生じるものであって，そのとき Q_i は音波と同じ振動数を持っている．あるいは，系が多原子分子であれば，その分子が単色の光で照らされるときに正弦的な駆動力が現われる．その場合，分子内の各原子は，入射光線の振動数に等しい振動数を持つ電気力を受けることになる．駆動力が，単一の振動数の正弦波的な変化をしないときでさえ，しばしば駆動力をそのような正弦波の重ね合わせから作り上げられるものと考えることができる．もし駆動力が周期的であれば，それはFourier級数の形に表わすことができる．場合によってはFourier積分で表わす方が適当なこともある．（6－61）式が線形方程式であるから，特殊な振動数に対する解は重ね合わされて，与えられた Q_i に対する完全な解を見出すことができる．ゆえに，力 Q_i が，

$$Q_i = Q_{0i}\cos(\omega t + \delta_i), \tag{6-62}$$

と書けるときに，この振動の性質を調べることは一般に重要なことである．ここで ω は外力の角振動数である．そうすると運動方程式は，

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2\zeta_i = Q_{0i}\cos(\omega t + \delta_i), \tag{6-63}$$

となる．方程式（6－63）の一般解は，同次方程式の一般解（すなわち自由な規準振動）と非同次方程式の１つの特解との和である．初期条件を適当に選ぶことによって，重ね合わされる自由振動を消すようにすることができる*．そうすれば，われわれは方程式（6－63）の特解，すなわち，明らかに次のような形を持った解，だけに注意を集中することができる．

$$\zeta_i = B_i\cos(\omega t + \delta_i). \tag{6-64}$$

この場合，振幅 B_i は，（6－64）式を方程式（6－63）に代入することによって次のように決定される．

---

*）この自由振動は，駆動力を加えることによって引き起こされる本質的に過渡的な振動である．もし系が，初めつり合いの配置にあるとし，駆動力を零からゆっくりと増して行くとすれば，この過渡的な自由振動は現われない．あるいは，そのかわりに，自由振動を減衰させるような散逸力が存在すると仮定することもできる（以下の議論を参照せよ）．

$$B_i = \frac{Q_{0i}}{\omega_i^2 - \omega^2}. \qquad (6-65)$$

そうすると，完全な運動は，

$$\eta_j = a_{ji}\zeta_i = \frac{a_{ji}Q_{0i}\cos(\omega t + \delta_i)}{\omega_i^2 - \omega^2}, \qquad (6-66)$$

p. 265
で表わされる．再び各粒子の振動は，規準振動の1次結合として表わされるが，今度は各々の振動は駆動力と同じ振動数で行われる．

各々の規準振動が励起されている度合は，2つの因子によって決定される．その第1は一般化駆動力の振幅 Q_{0i} である．もし，各粒子に作用する力が，ある特定の規準振動の振動方向に対応する成分を持たなければ，明らかにその方向に対応する一般化力の成分は零になり，したがって Q_{0i} は零になるであろう．**外力が，ある与えられた規準振動を励起することができるのは，その外力が粒子を，それが規準振動において運動するのと同じ方向に動かそうとする場合に限る．**第2の因子は，駆動力の振動数と，規準振動の振動数の接近の度合を表わすものである．(6−66)式の分母のために，ω がどれか1つの ω_i に近づけば近づく程，その規準振動は他の規準振動に比べて相対的にますます強く励起されるであろう．事実，(6−66)式は見掛け上，駆動力の振動数が ω_i の1つに一致すると，その規準振動の振幅が無限大になることを予言する── これはよく知られた共鳴の現象である．もちろん，実際には，(6−66)式を導く理論では，つり合いのまわりの小さい振動だけを仮定している．(6−66)式によって予言される振幅が大きくなるときには，この仮定は破れ，(6−66)式はもはや成立しない．駆動力の振動数が共鳴振動数よりも小さいときには，振動と駆動力の位相は合っているが，共鳴振動数を越えると位相は π だけずれることに注意しておこう．

われわれの議論は，散逸力あるいは摩擦力がないと仮定していた点で現実的ではなかった．多くの物理的な系では，このような力が存在しており，その時には力は粒子の速度に比例している．それゆえ，このような力は，散逸関数 $\mathscr{F}$ から導くことができる（第1−5節参照）．まず，摩擦力が自由振動に与える影響を考えよう．

その定義によって，$\mathcal{F}$は速度について２次の同次関数でなければならない．すなわち，

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j \qquad (6-67)$$

である．明らかに$\mathcal{F}_{ij}$は対称であり，$\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ji}$，また一般には座標 の関数であろう．われわれはつり合いの配置のまわりの微小振動だけを取り扱うから，運動エネルギーのときに行ったのとまったく同じように，この係数をつり合いの位置のまわりで展開して，第１項すなわち定数項だけを残せば十分である．以下の議論で（６－67）式を用いる時には，$\mathcal{F}_{ij}$はこの定数を表わすものとする．$2\mathcal{F}$が摩擦力によるエネルギー散逸の時間的な割合を表わしているということを思い出そう（（２－60）式参照）．散逸関数$\mathcal{F}$は決して負とはならない．今の場合には，Lagrange の運動方程式の完全な組は次のようになる（第１－５節参照）．

$$T_{ij}\ddot{\eta}_j + \mathcal{F}_{ij}\dot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j = 0. \qquad (6-68)$$

明らかに，運動方程式が結合しないように，規準座標を見出すためには，３
p. 266 つの２次形式，T, V, $\mathcal{F}$を同時に対角型にする主軸変換を見つける必要がある．上に示したように，これは一般的には可能でない．任意の散逸関数に対しては，通常規準座標を見つけることはできない．しかし，同時に対角化することができるいくつかの例外的な場合がある．例えば，摩擦力が粒子の速度と質量の両方に比例する場合，T が対角化されるときにはいつでも$\mathcal{F}$は対角型にできるであろう．そのような同時対角化が可能であるときには，運動方程式は規準座標で，

$$\ddot{\zeta}_i + \mathcal{F}_i\dot{\zeta}_i + \omega_i^2\zeta_i = 0 \quad \text{（和はとらない），} \qquad (6-69)$$

となる．ここで$\mathcal{F}_i$は，ζ_iで表わされたとき，$\mathcal{F}$の対角化された形における係数であって，負でない定数である．方程式（６－69）は，

$$\zeta_i = C_i e^{-i\omega_i' t},$$

の形の関数を用いて解くことができる．ここで ω_i' は２次方程式，

$$\omega_i'^2 + i\omega_i'\mathcal{F}_i - \omega_i^2 = 0 \quad \text{（和はとらない），} \qquad (6-70)$$

を満足する．方程式（6－70）は次のような2つの解を持っている．

$$\omega_i' = \pm\sqrt{\omega_i^2 - \frac{\mathscr{F}_i^2}{4}} - i\frac{\mathscr{F}_i}{2}\,. \qquad (6-71)$$

ω_i' が複素数であるから，この運動は純粋な振動ではない．（6－71）式から，ω_i' の虚部は解に $e^{-\mathscr{F}_i t/2}$ という因子を与えることがわかる．そして $\mathscr{F}_i$ は負でないから，これは常に時間と共に指数関数的に減少する関数である．* 摩擦のために減衰因子が現われることは，ほとんど当然のことであるといってよい．粒子が振動するときには，摩擦力に抗して仕事をし，したがって系のエネルギー（それゆえ振動の振幅）は時間的に減少するに違いない．（6－71）式の実部は系の運動の振動性を表わす因子であるが，摩擦のある場合には振動数も変わってくることに注意しなければならない．しかしながら，もし散逸が小さければ，$\mathscr{F}_i$の2乗の項は省略することができ，振動数は摩擦のないときと同じになる．その時には，全体の運動は単に，自由な規準振動の指数関数的減衰であって，

$$\zeta_i = C_i e^{-\mathscr{F}_i t/2} e^{-i\omega_i t}\,, \qquad (6-72)$$

で表わされる．

もし T，V を対角型にする変換が，散逸関数を同時に対角化できない場合には，その解を求めることははるかに困難になる．しかし解の一般的性質は，かなりの程度まで前に述べた場合と同じである．すなわち解は，指数関数的な減衰因子と，振動的な指数関数との積になる．方程式（6－68）の次のような形の解を探してみよう．

$$\eta_j = Ca_j e^{-i\omega t} = Ca_j e^{-\kappa t} e^{-2\pi i\nu t}\,. \qquad (6-73)$$

p.267
この解を代入すると，方程式（6－68）は次のような1組の連立方程式になる．すなわち，

$$V_{ij}a_j - i\omega\mathscr{F}_{ij}a_j - \omega^2 T_{ij}a_j = 0. \qquad (6-74)$$

ω を $i\gamma$ と書くのが便利なので，

*）（すべてではない）いくつかの $\mathscr{F}_i$ は零であるかも知れない．それは単に，対応する規準振動に摩擦力がないことを意味するだけである．重要な点は，$\mathscr{F}_i$ が負にはならないことである．

$$\gamma = -i\omega = -\kappa - 2\pi i\nu, \tag{6-75}$$

とおけば，$-\kappa$ は γ の実部である．V，T と $\mathscr{F}$ の正方行列によって，（6－74）式の連立方程式の組は，γ を含む1列行列方程式，

$$\mathbf{Va} + \gamma\mathbf{Fa} + \gamma^2\mathbf{Ta} = 0, \tag{6-76}$$

となる．同次方程式（6－74）あるいは（6－76）は，ω あるいは γ のあるいくつかの値に対してだけ a_j について解くことができる．対応する永年方程式を実際に計算しなくても，κ は常に負とはならないことは次のようにして示すことができる．行列方程式（6－76）に左から $\mathbf{a}^\dagger$ を掛けることによって，それを γ に対するスカラー方程式，

$$\mathbf{a}^\dagger\mathbf{Va} + \gamma\mathbf{a}^\dagger\mathbf{Fa} + \gamma^2\mathbf{a}^\dagger\mathbf{Ta} = 0, \tag{6-77}$$

に変換する．方程式（6－77）は，その係数が（6－19）式に現われたのと同じ一般的な型の行列の積である γ の2次方程式である．$\mathbf{a}$ を $\boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}$ のように展開してみるとわかるように，$\mathbf{V}$，$\mathbf{F}$ および $\mathbf{T}$ の対称性によって行列の積はすべて実数である（（6－20）式参照）．したがって γ がこの2次方程式の根であれば，その共役複素数 γ^* もまた根でなければならない．2次方程式の2根の和は1次の項の係数を2次の項の係数で割ったものにマイナスの符号をつけたものであるから，

$$\gamma + \gamma^* = -2\kappa = -\frac{\mathbf{a}^\dagger\mathbf{Fa}}{\mathbf{a}^\dagger\mathbf{Ta}}, \tag{6-78}$$

である．したがって κ は a_j の実部と虚部によって，

$$\kappa = \frac{1}{2}\,\frac{\mathscr{F}_{ij}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j)}{T_{ij}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j)}, \tag{6-79}$$

と表わされる．散逸関数 $\mathscr{F}$ は常に正でなければならず，また T は正定符号でなければならない．したがって κ は負の値をとることはできない．すなわち系の振動は，時間的に指数関数的に減衰し，決して時間と共に増大することはない．もし $\mathscr{F}$ が正定符号であれば，κ は零であってはならない（そして正である）から，すべての規準振動は指数関数の減衰因子を含んでいることに注意しよう．ω の

実部によって与えられる振動数は，もちろん散逸力に影響されるが，しかし振動の1周期の間の減衰が余り大きくなければ，この振動数の変化は小さいであろう．

最後に，散逸力を含む場合の，正弦的に変化する強制振動を考えよう．駆動力の時間的変化を，

$$F_j = F_{0j} e^{-i\omega t},$$

で表わす．ここで F_{0j} は一般に複素数である．そうすると，運動方程式は次のようになる．

$$V_{ij}\eta_j + \mathscr{F}_{ij}\dot{\eta}_j + T_{ij}\ddot{\eta}_j = F_{0i} e^{-i\omega t}. \qquad (6-80)$$

p. 268
この方程式に対する特解として，

$$\eta_j = A_j e^{-i\omega t},$$

の形のものを求めてみよう．これを方程式（6－80）に代入すると，振幅 A_j に対する次のような非同次連立1次方程式が得られる．

$$(V_{ij} - i\omega\mathscr{F}_{ij} - \omega^2 T_{ij})A_j - F_{0i} = 0. \qquad (6-81)$$

この連立1次方程式の解[*] は Cramer の公式を用いて容易に求めることができて，

$$A_j = \frac{D_j(\omega)}{D(\omega)}, \qquad (6-82)$$

となる．ここで，$D(\omega)$ は方程式（6－81）の A_j の係数によって作られる行列式であり，$D_j(\omega)$ は $D(\omega)$ の第 j 番目の列を $F_{01}, \cdots, F_{0n}$ で置き換えて得られる行列式である．われわれは，主として分母 $D(\omega)$ に関心を持つ．というのは，共鳴の起こり方は本質的にこの分母の関数形によって決まるからである．ところで，$D(\omega)$ は同次方程式（6－74）に対応する永年方程式に出てくる行列式である．したがってその根は自由な規準振動の複素振動数[1] である．γ と γ^* の両方

---

*) この連立1次方程式はもちろん，単に連立1次方程式（6－74）の非同次型である．

1) “自由な” という言葉を使ってあるが，もちろん摩擦力は考えに入れられている．すなわち（6－71）式のような形の複素振動数である．

が共に（6－77）式の根であるということから，（6－75）式によって，もし ω_i が $D(\omega)$ の根であるならば $-\omega_i^*$ もまた根である．n 個の自由度をもつ系に対しては，それゆえ $D(\omega)$ は次の形に表わすことができる．

$$D(\omega) = G(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)\ldots(\omega - \omega_n)(\omega + \omega_1^*)(\omega + \omega_2^*)\ldots(\omega + \omega_n^*).$$

ここで G はある定数である．この式はまた，積の記号 Π を用い，ω を $2\pi\nu$ と書くと，

$$D(\omega) = G\prod_{i=1}^{n}(2\pi(\nu - \nu_i) + i\kappa_i)(2\pi(\nu + \nu_i) + i\kappa_i), \qquad (6-83)$$

と書くことができる．A_i を実部と虚部に分けるために，（6－82）式を実数化すれば，（6－82）式の分母は，

$$D^*(\omega)D(\omega) = GG^*\prod_{i=1}^{n}(4\pi^2(\nu - \nu_i)^2 + \kappa_i^2)(4\pi^2(\nu + \nu_i)^2 + \kappa_i^2), \quad (6-84)$$

となる．よって強制振動の振幅は，自由な振動の振動数 $\pm\nu_i$ の近傍で典型的な共鳴の振舞いを示す．減衰定数 κ_i がある結果として，共鳴の場合にも分母は自由な振動数の値においても，もはや零にはならず，振幅は有限となる．特殊な共鳴の分母以外では A_j の項の振動数依存性のために，振幅が最も大きくなる駆動力の振動数は，もはや正確に自由な振動の振動数に等しくはない．しかし，減衰が十分小さくて共鳴のピークを認知できる限り，共鳴振動数のずれは小さい．

p. 269

われわれは，もっぱら力学の言葉を使って微小振動の性質を論じてきた．しかしながら，読者はきっとこの理論と電気回路の振動の理論との類似性に気付かれたであろう．その場合には V_{ij} をキャパシタンス（capacitance）の逆数，$\mathscr{F}_{ij}$ を抵抗，T_{ij} をインダクタンス（inductance）とみなせば，方程式（6－68）は n 個の結合回路に対する回路方程式になるのである．そして，1つあるいはそれ以上の駆動力を回路にはいっている角振動数 ω の電源で置き換えれば，強制振動の方程式（6－80）は第2章で述べた電気回路の方程式（2－42）と一致

する．われわれはこの章で，微小振動を取り扱うために工夫された方法，およびそのような運動に関する一般的な定理のごく一部だけを述べたにすぎない．紙数の制限のために，例えばLaplace変換の方法については述べることができなかった．このLaplace変換は，任意の時間依存性を持つ駆動力に対する線形振動系の応答を調べるのに大変役に立つものである．また，今なお研究分野の広がっている非線形振動(nonlinear oscillations)についても，ここで考察することは適当でないであろう．この非線形振動においては，位置のエネルギーは3次以上の項を含んでおり，したがって運動はもはや単振動ではない(この分野で問題になることのある一部分については，摂動論が取り扱われるときに紹介することにしよう)．すでに述べたように，定常運動のまわりの微小振動の定式化における発展は，後に力学のHamilton形式との関連において述べられるであろう．われわれが注目すべきもう1つの事柄は，連続無限の自由度を持つ振動系への一般化である．問題は，離散系の古典力学に対応して，連続系を取り扱う方法を作ることができるかどうかということである．連続系についてのそのような考察は，離散的(不連続的)な系の力学の正準変換による定式化が展開され，そしてまたNewton力学の構造が特殊相対性理論においてどのように修正されなければならないかを見た後に，第12章で取り扱うときまで延期することにしよう．

参 考 書

H. Jeffreys and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*　1つの行列または1対の正定符号の2次形式を対角化することは，物理学者のための数学的方法についての教科書の共通のトピックである．この特別な参考書は，第4章において関連のある議論が，明らかに，特に微小振動の問題に留意して書かれているので選ばれたものである．実際に固有振動数を求めるのに役立つ，永年行列式の根の性質について多くの定理が与えられている．

E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics.*　第VII章で，振動の理論が述べられ，またTとVとを同時に対角化することができるということが直接証明されている．しかし，この問題の取り扱いは，大変明解であるというわけではない．それよりも，その章の後の方にある拘束の影響や，かなり詳しく論じられている定常運動のまわりの振動に関

する議論の方がもっと価値がある．第Ⅷ章の第94節では，散逸力のある場合の振動が論じられているが，断片的であり，かつ自由度が2の場合に限られている．

D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics.*　題名にもかかわらず，この書物は必ずしもハミルトニアン力学に限られていない．微小振動についての第3章は，ラグランジアン力学以上のものは仮定されていない．その取り扱いは，行列のすべての要素が
p. 270 詳細に書き出されていることなど，行列の方法に特徴がある．振動の規準型の有用な図解された例が豊富に載せられている．直線状3原子分子の振動の対称性についての結論のいくつかには問題がある．

J. L. Synge and A. Schild, *Tensor Calculus.*　この書物の第2章は，われわれの目的に適当な程度以上であるが，Riemann 空間とそれに関連した計量テンソルの入門を与えている．特に著者達は，単刀直入に共変量と反変量への微分を導入している．本書の第7章では表面にでてくるけれども，この共変量と反変量の区別はここまでは必要でない．

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics.*　予期されるように，微小振動の理論は簡潔に述べられているが，多くの基礎的事項に触れている．3原子分子の振動は，直線状のものもまた“曲った状態”のものも，ある程度詳しく考察されている．この章では線形振動のみが考察され，位置エネルギーと運動エネルギー行列のパラメーターを含む行列要素は，時間的に一定であると仮定される．これらの行列要素が時間と共に変化するような，振動子のパラメーター励振の研究は，最近の数10年間に急激に発展し，別個のがっちりした取り扱いを必要とする分野となった．Landau と Lifshitz は第27節から第30節において，このテーマについて簡潔な手引きを与えている．パラメーター励振や非線形振動の分野では，ロシヤ人の寄与が特に顕著であった．しかしながら，議論の中には，その研究成果の氷山の一角のみが現われている．

L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics.*　振動系の現代的な扱い方が，ここでは実際的な現実の世界との接触を断つことのないような方法で与えられている．本章の主題は，この書物では線形自律系（linear autonomous system）の形で現われるが，力点は運動が安定であるかどうかに置かれている．これに対してわれわれは，最初から運動が安定であることは仮定して出発したのである．古典的および現代的な，運動の安定性についての判定条件（例えばLiapunov の方法）が議論されている．パラメトリック振動（非自律系（nonautonomous system））については別の章が設けられている．

Y. Chen, *Vibrations: Theoretical Methods.*　この工学むけの教科書の大部分は，力学の基本的な考え方を導入することに関心を示す一方で，他方では連続系の振動の取り

扱いにも関心を寄せている．残りの部分では，計算された多くの例と，(時にはぎこちない仕方で)与えられた当面の問題に関連した行列の要素が陽に与えられていて，この章で取り扱った分野をカバーしている．強制振動の問題を取り扱うためのLaplace変換とFourier 変換との応用は特に興味深い．

H. C. Corben and P. Stehle, *Classical Mechanics.* この有名な教科書の微小振動についての短かい章は，一般論よりはむしろ多数の例に注意を集中している．付録3については特別な言及がなされるべきであろう．この付録3では，系の示す固有な対称性に基づいて，分子に対する固有振動数を求める問題の複雑さを減らすために，群論的方法を使うことに対する短かい入門が与えられている．問題が手で解かれなければならなかった，コンピューターの出現以前の時代においては，計算の量を減らすための方法は当然強い関心となり，かつ研究の主題であった．零の振動数または縮退している振動数を確認するために対称性を用いることは，明らかに興味があるけれども，高速演算のできるコンピューターの出現によって，これらの方法の計算上の重要性は軽減された．このことに関連して，W.D.Gwinn による論文，"Normal Coordinates: General Theory, Redundant Coordinates, and General Analysis Using Electronic Computers," *Journ. Chem. Phys.* 55,477(July 15, 1971)を見よ．

G. Herzberg, *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules.* この書物には，古典的な微小振動論の分子構造論への応用の実例が，たくさん与えられている．ここで
p.271 は，対称性や運動の定数を利用して，計算の複雑さを減少させるための技法が，多くの分子模型に対する陽な解を見出すために適用されている．多くの分子について，いろいろな規準振動を示す図が載っている．

E. B. Wilson, Jr.; J. C. Decius; and P. C. Cross, *Molecular Vibrations.* 1955年に出版されたこの書物は，明らかに，化学者に対する分子振動の問題についての，今でも変わらない標準的な本である．この書物は，その精神において，完全にコンピューター以前のものである── ベンゼン分子についての長い章は，"標準的な卓上計算機"についての章の計算をチェックすることによって，行列計算をうまくやれるようになるように読者に指示することで終っている．対称性の群を用いる方法はかなり詳細に述べられている．量子力学についてのいくらかの知識が必要である．

Lord Rayleigh, *Theory of Sound.* この書物は物理学の古典の1冊であって，振動の理論のすべての面にわたる多くの定理や，物理的な説明が含まれている．それらの理論の多くを発展させるのにRayleigh 自身あずかって力があった．特に散逸関数は彼の導入したものである．その取り扱いは極めて滑らかでかつ明確であり，また拘束の影響や固有振動の定常性のような，普通あまり論じられないトピックスにも言及してい

る．Rayleigh は Routh の仕事に多くを負っている．Routh は 1877 年の Adams 賞の論文，および教科書 Rigid Dynamics において，微小振動について系統立った議論を与えており，微小振動の理論の開祖の１人である．

E. A. GUILLEMIN, *The Mathematics of Circuit Analysis.* ここでこの参考書を挙げたのは，微小振動の理論が，現代的な電気工学において重要な役割を演じていることを示すためである．２次形式，およびその主軸変換の理論についてもかなり注意が払われている．その取り扱いには，行列代数がふんだんに用いられていて，程度は高くかつ洗練されている．

演 習 問 題

1. $y = ax^4$ で定義される曲線に沿って，垂直で一定な重力場中で，質量を持った粒子が運動している．ここで y は垂直な方向への距離である．平衡の位置のまわりの微小振動に対する運動方程式を求めよ．

2. 図 1－4 に示されている２重振子において，糸の長さは等しいが，質量はちがっている場合の規準振動を求めよ．下の方の質量が上のものに比べて小さい時には，２つの共鳴振動数はほとんど等しいことを示せ．この振子において，上の質量を鉛直からわずかにずらした後に，放して運動させる時，この振子は定まった時間間隔をおいて一方の振子が静止し，その時に他方の振子が最大の振幅を持つような運動をすることを示せ．これはよく知られた“うなり”(beats)の現象である．

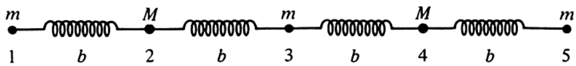
3. 直線状の３原子分子の問題は，$y_1 = x_2 - x_1, y_2 = x_3 - x_2$ で定義される座標を導入し，そして重心が静止しているという条件を用いて x_2 を消去すれば，２自由度の問題に帰着される．これらの座標を用いて規準振動の振動数を求め，それらが第 6 － 4 節の結果と一致することを示せ．原子間の距離 y_1, y_2 は分子の**内部座標**(*internal coordinates*)と呼ばれる．

4. 第 6－4 節で論じた分子の問題で，中心の原子が力の定数 k のばねで原点に結ばれていると考えて縦振動の振動数を求めよ．このような条件があるとき，並進運動は現われないことを示せ．

5. a) 直線状の３原子分子において，初期条件が，中心の原子は静止しているが，つり合いの位置から a_0 だけ変位しており，他の２個の原子はつり合いの点にあるように与えられたとしよう．質量中心のまわりの微小縦振動の振幅を求めよ．振動の規準型の振幅を求めよ．
p.272

b) 中心の原子が最初つり合いの位置にあるが，初速度 v_0 を持っているとき，a)と同じ計算をせよ．

6. 直線状5原子分子は，次の図のような質量と理想的なばねの配置によってシミュレートされる．すべての力の定数は等しい．縦振動に対して，固有振動数と振動の規準



型を求めよ．〔**ヒント：**座標 η_i を，

$$\eta_3 = \zeta_3, \qquad \eta_1 = \frac{\zeta_1 + \zeta_5}{\sqrt{2}}, \qquad \eta_5 = \frac{\zeta_1 - \zeta_5}{\sqrt{2}},$$

および η_2 と η_4 に対してはこれと対称な式で定義される ζ_i へ変換せよ．この永年行列式は，そのときより低い階数の行列式に因数分解されるであろう．〕

7. 直線状の3原子分子において，y 軸および z 軸方向の運動は，ポテンシャル，

$$V_y = \frac{k}{2}(y_2 - y_1)^2 + \frac{k}{2}(y_3 - y_2)^2,$$

$$V_z = \frac{k}{2}(z_2 - z_1)^2 + \frac{k}{2}(z_3 - z_2)^2,$$

によって支配されると仮定しよう．3次元の微小振動の固有振動数を求め，振動の規準型を記述せよ．零振動数はどんな対称性を表わすか？ 演習問題6で示唆された種類の中間座標を使ってよい．

8. ある3原子分子のつり合いの配置は，直角2等辺3角形の3つの頂点に等しい質量の原子があって，それらが等しい力の定数のばねで結ばれているようなモデルで表わされるとする．1平面内の振動の型に対する永年行列式を求めよ．また，行列式の列を適当に並べ換えて，永年方程式は3重根 $\omega = 0$ を持つことを示せ．行列式を3階のものに帰着させて，自由振動の零でない振動数を求めよ．

9. 前問における運動方程式は次のような解によって満足されることを直接に示せ．（a）すべての原子の x 軸に沿う一様な並進運動，（b） y 軸に沿う一様な並進運動，（c） z 軸のまわりの一様な回転．

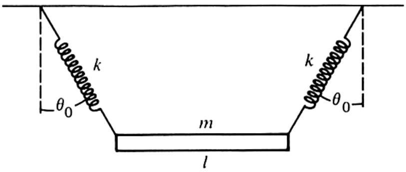
10. a) 3つの等しい質量を持つ質点が，正3角形の頂点につり合いの位置を持っている．それらの質点は，その正3角形に外接する円の円弧に沿っている等しいばねで結びつけられている．質点とばねは，その円周上のみを動くように拘束されている．したがって，例えば，ばねの位置エネルギーは，覆われる円弧の長さによって決定される．

平面内での微小振動の固有振動数と規準型を決定せよ．零振動数の物理的意味を明らかにせよ．

b) ばねの１つの力の定数が δk だけ変化したとし，他の力の定数は変わらないとする．δk の１次のオーダーまでで，固有振動数と規準型の変化はどうなるか？

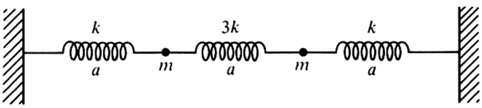
p.273
c) 質点の１つの質量が δm だけ変えられるとする．この場合，規準振動の固有振動数と規準型はどのように変化するか？

11. 長さ l で質量 m の一様な棒がつり合っているときの長さが b で，力の定数 k の２つの等しいばねで図に示されているように吊されている．



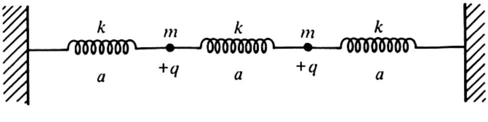
平面内での微小振動の規準型を求めよ．

12. 図に示されているように，２つの粒子が１次元的に３つのばねの接合部につながれて運動している．ばねはすべて，引き伸ばされていないとき長さ a を持っており，力の定数と質量は図に示されている通りであるとする．

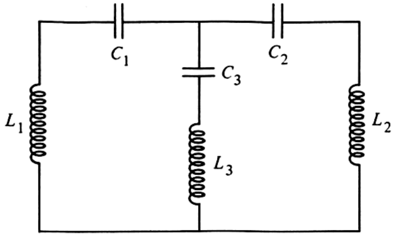


この系の固有振動数と規準型を求めよ．

13. 図に示されているように，等しい質量 m の２つの質点が，力の定数 k の３つの等しいばねによって，固定点および相互に，結びつけられている．各ばねのつり合いにおける長さは a である．各質点は正の電荷 $+q$ を持ち，Coulombの法則にしたがってお互いに反発している．固有振動数に対する永年方程式を立てよ．



14. 次の結合回路の固有振動数に対する表式を求めよ.



p.274
15. 一般化駆動力 Q_i が正弦的でなければ，減衰がない場合の規準座標の強制振動は，

$$\zeta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(\omega)}{\omega_i^2 - \omega^2} e^{-i\omega t}\, d\omega,$$

で与えられることを示せ．ただし $G_i(\omega)$ は Q_i の Fourier 変換であって，

$$Q_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega$$

で定義される．この場合，もし散逸関数が T，V と同時に対角化されるならば，強制振動は，

$$\zeta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(\omega)(\omega_i^2 - \omega^2 + i\omega \mathscr{F}_i)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \mathscr{F}_i^2} e^{-i\omega t}\, dt,$$

で与えられることを示せ．この式は典型的な共鳴型の分母を持っている．これらの結果は，**演算子法**（*operational calculus*）と呼ばれる，過渡的な振動を取り扱うための有力な方法の簡単な例である．

第７章　古典力学における特殊相対性理論

p.275

古典力学は，第１章に与えたいろいろな定義や要請を基にして展開されてきた．しかしながら，問題にする速度が光速度に近づくと，よく知られているように，これらの要請はもはや実験事実を正しく表わさなくなり，そのときにはこれらを，いわゆる**特殊相対性理論**（*special theory of relativity*）の要求に合うように変えなければならない．これは力学の構造の１つの修正であって，量子論によって要求されるような，もっと破天荒な書き直しと混同してはならない．量子効果は重要であるが，相対論的な補正は無視し得るような物理的な問題が沢山ある．そしてまた逆に，相対論的な速度を含んではいるが，量子力学的に精密化しても議論には影響がないような現象もしばしば起こる．すなわち，量子力学と相対性理論の間には，本来，固有な結びつきは何もないのであって，一方の効果を他方を考えに入れないで論じることができるのである．したがって，相対性理論によって，古典力学の定式化にどのような変更を加えることが必要であるかを調べることは，実際的にはかなり重要なことである．

しかし，特殊相対性理論およびそれから導かれる結果について，広く議論するつもりはない．ここでは，この理論の形成に導いた出来事や実験については，余り多くを述べないし，また，この理論の哲学的意味や，“常識を楽しそうにあざ笑っている”かのようにみえる見掛けの上のパラドックスについては，ほんの少ししか触れないであろう．本書では，読者は，少なくとも，一様に運動する系の間の相対論的変換や，それから生ずる著しい物理的な現象については，初等的な入門はすませていると考えることにする．以下の議論では，どのようにして特殊相対性理論が，古典力学の枠の中にはめこまれるかということに重点をおき，この課題に必要とされる限りの理論について述べることにする．

7−1　特殊相対性理論の基礎的なプログラム

前数章の議論では，“空間系”あるいは“空間に固定された系”という言葉がしばしば用いられた．このような言葉は，まさに“慣性系”(inertial system)の意味に用いられたのである．慣性系というのは，その系において，Newton の運動法則，

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \tag{7−1}$$

p.276
が成り立つような系である．慣性系に対して回転している物体に固定された系では，この条件は満足されず，(7−1)式には回転の効果を表わす項をつけ加えなければならない．他方，“空間系”に対して一様に運動している系は，それ自身また慣性系であるように見えるであろう．$\mathbf{r}'$ を第２の系の原点から与えられた点へ引いた動径ベクトルとし，$\mathbf{r}$ を第１の系においてこれに対応するベクトルとし，２つの系が $t = 0$ において一致しているとすれば，これら２つのベクトルは，次の関係で結ばれていることは明らかであろう（図７−１参照）

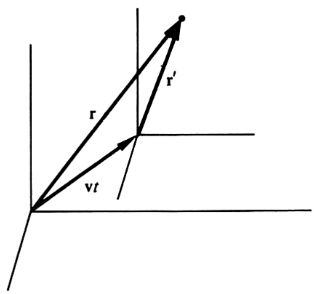


図７−１
Galilei 変換を示す図．

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t. \tag{7−2}$$

ここで $\mathbf{v}$ は，第１の系に対する第２の系の一様な速度ベクトルである．相対速度 $\mathbf{v}$ は一定であるから，(７−２)式の時間に関する１階導関数は，

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{v}, \tag{7−3}$$

であり，もう一度微分すれば，

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}, \qquad (7-4)$$

が得られる．それゆえ，加速度は２つの系で同じである．Newton の法則，方程式（７－１）がある１つの系で成立するならば，もし力が両方の系で同じ形をもっているなら，それはもう１つの系でも成立しなければならない．多くの普通の力学の問題では，力は２つの系の間で明らかに変わらない．例えば，一定の力の場 $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ のようなものがそうである．力が，系の中の質点間の，スカラーである距離のみの関数であるポテンシャルから導かれるときには何時でも，力は明らかにプライムの付いた系でも付かない系でも同じ形に表わされる．そして，対応する運動方程式は変わらない*.

他方，Galilei 変換として知られている変換，すなわち（７－２）と（７－３）式で表わされる変換によれば，光の速度は２つの系で異なっている筈である．そこで，プライムのつかない系（以下第１の系という）の原点に光源があって，
p.277
速さ c で進む球面波を出しているとしよう．動径ベクトル $\mathbf{r}$ は，この球面波の波面の上の与えられた点の位置ベクトルを表わすものとする．そうすると，第１の系では，波面上の１点の速度は $\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}$ で与えられる．ここで $\mathbf{n}$ は $\mathbf{r}$ 方向の単位ベクトルである．ところが（７－２）式によると，プライムのついた系（以下第２の系という）においては，これに相当する波の速度は，$\dot{\mathbf{r}}' = c\mathbf{n} - \mathbf{v}$ である．すなわち，光源に対して運動している系では，波の速度の大きさは一般にもはや c ではない．実際，この系では波の速度は方向によって違うのであるから，その波はもはや球面波ではないであろう．

ところが，長期間にわたって行われた一連の研究，特に，有名な Michelson および Morley の実験によって，光の速度はすべての方向に対して常に一定であり，観測者，伝達媒質（transmitting medium）および光源の一様な相対

---

*) そのようなポテンシャルがある場合でも，ラグランジアンは，２つの系で同じ形をもたないことは注目に価するほど興味深い．しかしその差は位置のみのある関数の全導関数であり（演習問題１を参照），運動方程式は２つの系で同じであることを示すことができる．

運動には無関係であるということが示された*. 光が, 真空中で速さ c で伝わるということは, Maxwell の方程式の結果であるから, Galilei 変換は Maxwell の方程式の形を保存しないという結論になる筈である. さて, Galileo および Newton の時代から, 物理の**すべての**現象は, お互いに相対的に一様な運動をしているどの系からも同じように見えなければならないということは, 暗黙のうちに物理学において仮定されていた. 与えられた系の**内部だけで**なされる測定は, その系を, その系に対して一様に運動しているすべての他の系から区別することができてはならないのである. この**等価性の要請**（*postulate of equivalence*）は, 物理法則はすべての一様に運動している系で, 同じような仕方で言い表わされなければならないこと, すなわち Galilei 変換を受けたときに**共変**（*covariant*）でなければならないことを要求する. 20世紀への曲り角で, 物理学の直面していたパラドックスは, 次のようなものであった. すなわち, Newton の法則も, Maxwellの法則も実験的には等価性の要請を満足するように見えるのに, 理論的には, すなわちGalilei 変換によれば, Maxwell の方程式はこの要請を満足しない, ということである. Einsteinは等価性の要請をあらわに主張して, 不変に保たれなければならないのは, Maxwellの方程式の方であって, それゆえ, Galilei 変換が正しいことはあり得ない, と結論した. 一様に運動している系の間の新しい関係, すなわち **Lorentz 変換は**, すべての一様に運動する系において光の速さを一定に保つようになっていなければならない. Einsteinは, そのような変換は, 時間と同時性の通常の概念の変更を要求するものであることを示した.

先験的に, Newtonの運動方程式も, 改訂を要求されるということは大いにあり得ることである. なぜなら, それは, 今では正しくないことがわかっている, Galilei 変換の下においてのみ等価性の要請を満足しているからである.

---

*) これらの実験的証明のうちもっとも著しいものの1つは, 走っている π° 中間子が崩壊することによって放射される光子の速度の測定である. 光源は, それ自身殆ど光と同じ位の速さで動いていたにもかかわらず, 実験室系で測定された放出光子の速度は, 0.01%よりも小さい実験誤差の範囲内で, c と一致した. T. Alvağer *et al.*, *Physics Letters* 12, 260 (October 1, 1964) を見よ.

多分，普通に受け入れられている他の物理学の法則も，Lorentz 変換の下でその形を保持しないかも知れない．そして，そのときには，それらは正しい変換性をもつように一般化されなければならない．もちろん，その一般化は，光の速度よりずっと小さい速度に対しては，通常の形になるようなものでなければならない．このときには，Galilei 変換が近似的に正しいのである．

p.278

それゆえ，特殊相対論のプログラムは2重になっている．第1に，一様に運動している2つの系の間で，光速度を不変にするような変換を求めなければならない．第2に，物理学におけるいろいろな法則について，この Lorentz変換に対する変換性を調べてみなければならない．そして，その形が不変に保たれないような法則は，等価性の要請に従うように一般化されなければならない．現在までに，このプログラムを適用した結果として得られる物理的な描像に対して，多くの実験的な証明が得られているが，最終的にはこの事実こそが，Einstein の基本的な仮定の正しさに対するただ1つの証明になるのである．

7－2　Lorentz変換

読者は，既に Lorentz 変換の式に出会ったことがあると仮定することにしよう*．その原点が，時刻零において，どちらの系の観測者から見ても一致している，2つの座標系を考えよう．1つの系（それをプライムのついた系と呼ぶ）が，他の系（プライムのつかない系と呼ぶ）に対して，z 軸に平行な方向に相対速度 $\mathbf{v}$ で一様に動いているとする．そのとき2つの系で測定された座標，および時間の間の Lorentz 変換は次の式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
x' &= x,\\
y' &= y,\\
z' &= \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},\\
t' &= \frac{t - \dfrac{vz}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.
\end{aligned}
\qquad (7-5)
$$

*) Lorentz 変換の導出法は，すべての精巧さのレベルと，数学的厳密さの度合に対して非常に沢山ある．この章の終りの参考書の注釈つきのリストを見よ．

ここで，$\beta = v/c$，すなわち v と光速の比である．これらの変換式は，これらに対して先験的に要求されているすべての性質を満足している．とりわけ，それらは２つの系における光の速さを一定に保っている．プライムのつかない系の原点にある点光源が，時刻 $t=0$ に光波を発射するとしよう．プライムのつかない系から見たときの波面の方程式は球面であって，

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \tag{7-6}$$

となる．そうすると，少し代数的な計算をすれば，（７－５）式はプライムのついた系で観測される変換された波面は，また速さ c で拡がって行く球面であることを示す．すなわち，

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2, \tag{7-7}$$

である．さらに v/c について１次の項まで考えれば，（７－５）式は，

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= z - vt, \\ t' &= t, \end{aligned} \tag{7-8}$$

p.279

になる．相対的な速さが小さくなる極限では，このように，Lorentz 変換の式はGalilei 変換（７－２）式になり，それと同時に時間は両方の系で同じであることが陽に述べられている．

（７－５）式は，x および y 座標が変換によって変わらないことを示しているが，これもまたわれわれの期待した所である．相対運動の方向に垂直な方向は，運動によって影響を受けない．もっと形式的にいえば，空間の等方性ということは，１方向への相対運動は，他の方向のねじれを引き起こさないということを，前もって仮定しているのである．変換の方程式はまた，１次である．それらが１次でなければならないということは，明らかであるとは言えないかもしれないが，１次性は，小さい速度の極限で１次の Galilei 変換になることを保証する助けになる．事実，Lorentz 変換の下における系の慣性的性質を保持するためには，その変換が１次でなければならないということを示すことが

できる*. Newton の運動方程式の妥当性が疑わしいので，Einsteinは次のようなものとして，慣性系の新しい定義を与えた．すなわち，その中では，相互作用を受けない，孤立した質点は，静止しているか，一様に運動する．Lorentz変換の式は，1つの系における一様な運動が，他の系の一様な運動に変換されるべきものであるならば，1次でなければならない．

最後に，Lorentz変換の式は，真に相対的である，すなわち，逆変換は v の符号を変えるだけで元の変換と同じ形でなければならないことが期待されるであろう．(7－5)式がこの条件を満足することは，x, y, z, t を x', y', z', t' を用いて表わすように，直接解いて見ることによって容易に確かめられる．

Lorentz変換の式は，相対速度に対してある特別な方向を選び出すことのないように，容易にベクトルの形に書くことができる．$\mathbf{v}$ が z 軸に沿うとして，われわれは変換式(7－5)の空間部分を次のように定式化し直すことができる．すなわち，

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \left(\frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} - z\right)\frac{\mathbf{v}}{v} .$$

z が陽に現われることは，次の関係式を用いて，なくすることができる．すなわち，

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} = vz ,$$

p.280
を用いれば，上の式は次のようになる．すなわち，

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\frac{\mathbf{v}}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) - \frac{\mathbf{v}t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (7-9)$$

となる．ベクトル $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ を用い，また γ を

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} , \qquad (7-10)$$

で定義することによって，(7－9)式はもっと簡潔な形に書くことができて，次の式が得られる．

---

*) 例えば，R.D.Sard, *Relativistic Mechanics*, p.596, あるいは，V.Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*, 2nd ed., pp. 20－24を見よ．

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}(\gamma - 1) - \boldsymbol{\beta}\gamma ct. \tag{7-11}$$

時間に対する変換式の対応する形は,

$$t' = \gamma t - (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r})\frac{\gamma}{c}, \tag{7-12}$$

である.(7－11)と(7－12)式は，平行な軸をもつ2つの座標系が，お互いに相対的に，任意の方向に速度 $\mathbf{v}$ をもって一様に運動しているときの，これらの系の間のLorentz変換の式を構成する.

一般のLorentz変換の式(7－11)と(7－12)は，4つの座標の1つの組から他の4つの座標の組への1次変換の形をしている．それゆえ，前の数章で，1次変換を取り扱うために展開された数学的手段は，すべてLorentz変換に適用することができる．Minkowski は,4次元直交空間において，第4の座標を ict ととれば，Lorentz 変換は特に簡単で，親しみ深い形をとる，ということを指摘した．そのような4次元空間(Minkowski空間として知られている)における位置ベクトルの大きさの2乗は，次の形をもっている.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{7-13}$$

さて，Lorentz 変換は2つの系において，光の速さが変わらないように作られたものであるが，(7－7)と(7－13)式によれば，その条件は4次元空間における位置ベクトルの大きさが，その変換の下で不変に保たれることを要求するのと等価である．第4章でわれわれは，ベクトルの大きさに影響を与えない1次変換は直交変換であることを見た．このように，Lorentz変換は，*Minkowski* の4次元空間における1つの直交変換である.

Lorentz変換は，他の4次元座標系を用いて記述することもできる(第7－3節参照)．その軸の1つとして時間を含むどのような4次元空間も，**世界空間**(*world-space*)と呼ばれる．われわれの議論の大部分においては，専ら Minkowski空間だけが取り上げられる.

Minkowski 空間では，その第4座標は虚数であるから，その空間は複素空間
p.281
であり，この空間におけるLorentz変換の行列の要素は虚数であってもよい.

行列要素の陽な形は，（7－11）および（7－12）式の変換のベクトル形から直接に得ることができる．Minkowski 空間におけるLorentz変換の行列を **L** で表わすことにしよう．すなわち，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{L}\mathbf{x}, \tag{7-14}$$

であって，ここで $L_{\mu\nu}$ をその一般的な行列要素とする*. 4つの座標すべての上を動く添字には，ギリシャ文字を用いるのが慣習である．ローマ字は空間成分のみの上を動く添字を表わす．前のように，特に断わらない限り，和の規約が用いられる．

Minkowski 空間においては（7－11）と（7－12）式は次の形をとる．

$$x_j' = x_j + \frac{\beta_j \beta_k x_k}{\beta^2}(\gamma - 1) + i\beta_j \gamma x_4, \tag{7-15}$$

$$x_4' = -i\beta_k x_k \gamma + \gamma x_4. \tag{7-16}$$

それゆえ，$\boldsymbol{\beta}$ の任意の方向に対する **L** の要素は，

$$\begin{aligned} L_{jk} &= \delta_{jk} + \frac{\beta_j \beta_k}{\beta^2}(\gamma - 1), \\ L_{j4} &= i\beta_j \gamma, \\ L_{4k} &= -i\beta_k \gamma, \\ L_{44} &= \gamma, \end{aligned} \tag{7-17}$$

である．例えば，この章の初めに出した特別なLorentz 変換は，z 軸に沿う相対速度をもち，行列 **L** はそのときには簡単な形，

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \tag{7-18}$$

をとる．第4章で，直交行列の基本的な性質は，その転置行列が，逆行列に等

---

*) 残念なことに L はすでにラグランジアンと角運動量の記号として用いている．しかし実際には，使われる文脈から混同の起こる恐れは殆どない．

しいことであるということを見た．相対速度ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ をもつLorentz変換に対しては，その逆行列は，同じ行列でなければならないが，しかしそれは速度 $-\boldsymbol{\beta}$ に対するものである．（7－17）式を見ると直ちに，行列要素はこの条件を満足していることが示される．β_j の符号を変えることは，添字を入れ換えることと等価である．

p. 282 $\mathbf{L}$ と3次元直交変換との類似性はさらに進めることができる．（7－18）式を見ると，第3と第4座標の2×2部分行列は，1つの軸のまわりの3次元座標系の回転における，対応する部分行列，

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},$$

に似ていることがわかる．このことに対応して，（7－18）式は，Minkowski空間の x_3x_4 平面における回転であるということができる．しかしそのとき，回転角 ϕ は虚数であって，

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \sin\phi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{7－19}$$

で与えられる．もし虚数の角を用いることに不快を覚えるなら，$\phi = i\psi$ で定義される実の角 ψ を導入することができる．ψ に対しては，

$$\cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \sinh\psi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{7－20}$$

である．それゆえ（7－18）式における (x_3, x_4) 部分行列は次のように書くことができる．

$$\begin{pmatrix} \cosh\psi & i\sinh\psi \\ -i\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix}.$$

等価な回転角の助けによって，時にはLorentz変換の行列の演算が簡単化されることがある．例えば，2つの系の間の x_3 軸に沿う相対速度 β をもつLorentz変換 $\mathbf{L}$ と，同じく x_3 軸に沿う相対速度 β' をもつ第2の変換 $\mathbf{L}'$ があるとしよう．$\mathbf{L}$ と $\mathbf{L}'$ を相次いで適用することと等価なLorentz変換，すなわち，$\mathbf{L}'' = \mathbf{L}'\mathbf{L}$ はどのようなLorentz変換であろうか？この2つのLorentz変換は同じ平面内

での回転であるから，回転角は単に加えられるだけであって（２つの行列を掛けることによって証明されるように），**L**″に対するϕ''は$\phi+\phi'$である．（7−19）式によって，

$$\tan\phi = i\beta, \tag{7-21}$$

であり，そして

$$\tan\phi'' = \tan(\phi+\phi') = \frac{\tan\phi + \tan\phi'}{1-\tan\phi\tan\phi'},$$

であるから，直ちに２つの相続くLorentz 変換は相対速度が，

$$\beta'' = \frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'}, \tag{7-22}$$

で与えられる単一のLorentz 変換に対応することがわかる．（7−22）式は，良く知られた平行な速度に対するEinstein の加法法則である.* この結果について，２つの点を指摘しておこう．対応する非相論的な問題では，等価な速度は単に，２つの変換の速度の和になるであろう．相対論的には，分母にある項を通して補正があることになる．この補正の効果は，βとβ'が任意に１に近いとき（速さがcに近いとき）でさえも，β''は決して１に達しないし，ましてやそれを越えることはないということである．相続くLorentz 変換によっては，光速よりも速く進むことはできないのである．同じことだが，観測者が静止している系から出発して，光速よりも速く動く系へ変換する方法はない．その意味で光速は“極限速度”（ultimate speed）である．

p.283

Minkowski 空間において，（7−17）式によって与えられるのとは異なった形の直交行列を見出すことができることは全く容易にわかる．例えば，$L_{44}=1$，$L_{4i}=L_{i4}=0$で，**L**の残りの９個の要素は，普通の３次元空間における３×３直交行列**R**を形づくっていると考えよう．そのように定義された行列**L**は明らかにMinkowski 空間において直交である．しかし，その変換は２つの系の間の相対運動を含まない．したがって，その効果のすべては，単に空間座

*) この式は，実の角ψを用い，また２つの角の和に対する双曲線関数の公式を使っても，同じように導き出すことができる．

標の回転である．このように，すべての空間回転は，Lorentz 変換の１つの部分類（*subclass*）に属している．同じように，（7－14）式は，物理学の方程式がその形を不変に保つような，最も一般的な座標変換を与えるものではない．Minkowski 空間における原点の移動 ——— 空間並進と時間の原点変化を加えたもの ——— も，また物理法則の記述には影響を与えない．こうしても，（7－17）式を越えてのLorentz 変換の一般化の可能性は，まだ全部つくされたわけではない．それゆえ，これらの可能性をここで系統化しておくことは，当を得たことであるように思われる．

上に見たように，光の速さを一定に保つ，Minkowski 空間における最も一般的な変換は，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{7-23}$$

である．ここで $\mathbf{a}$ は原点の任意の並進ベクトルであり，また $\mathbf{L}$ は直交行列である．（7－23）式で表わされるような変換は，*Poincaré* **変換**あるいは**非同次**（*inhomogeneous*）**Lorentz 変換**と呼ばれる．直交条件，

$$\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{L} = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{1}, \tag{7-24}$$

は，４次元空間においては $\mathbf{L}$ の要素に対する10個の拘束条件（４個は対角，６個は非対角条件）に対応し，$\mathbf{L}$ の中には６個の独立な量が残ることになる．他に４個の独立な量が $\mathbf{a}$ に対して必要であって，それゆえ Poincaré変換を定めるには，一般に10個の独立な量を指定することが必要である．現在の目的のためには，われわれは，**同次**（*homogeneous*）**Lorentz 変換**，すなわち，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{L}\mathbf{x}, \tag{7-14}$$

だけを考えればよい．これは６個の独立な要素を含んでいる．普通の空間直交変換のときと同じように，直交条件は $\mathbf{L}$ の行列式の２乗が１であることを要求する．

$$|\mathbf{L}|^2 = 1\,. \tag{7-25}$$

p.284
（7－25）式を満足する可能な行列のうち，$|\mathbf{L}| = 1$ であるような行列だけが連続的に恒等変換に行くことができる．$\mathbf{L}$ のそのような形は，３次元の場合と

同様に，**固有**（*proper*）Lorentz 変換として知られている*. しかしながら，すべての空間座標および時間座標の同時反転を含む変換もまた行列式＋1をもっている．以下の議論によって，一般に，L_{44}^2 は1に等しいか1より大きくなければならないことが容易にわかる．（7－24）式の 44 要素は，

$$L_{44}^2 + L_{4j}L_{4j} = 1, \qquad (7-26)$$

と書くことができる．さて，要素 L_{4j} は虚数の第4座標を実数の空間座標に結びつけるものである．それゆえ，L_{4j} は（同じように L_{j4} も）純虚数でなければならず，したがって和 $L_{4j}L_{4j}$ は負でなければならない．それゆえ，

$$L_{44}^2 \geqslant 1, \qquad (7-27)$$

でなければならない．同じ型の議論によって L_{44} は実数でなければならない．（7－27）式の表わす2つの可能性のうちで，$L_{44} \leqslant -1$ は時間反転を含み，$L_{44} \geqslant 1$ だけが，恒等変換との連続性を許すことになる．$L_{44} \geqslant 1$ であるような Lorentz 変換は**順時的**（*orthochronous*）であると呼ばれ，もし $L_{44} \leqslant -1$ であるならばそれらは**非順時的**（*nonorthochronous*）であると言われる．$|\mathbf{L}|$ と L_{44} の符号の4つの可能な選択のうちで，順時固有 Lorentz 変換のみが，恒等変換から連続的に導かれ得るのである．そのような変換は**制限**（*restricted*）**Lorentz 変換**として知られている† ― それらだけが，固有回転を含み，小さい相対速度の極限で Galilei変換になることができる．（7－17）式における行列要素の平方根の符号は，それらが制限 Lorentz 変換を表わすようなものであることは明らかである．生涯を通じて，知らずに散文で話していたことを知って喜んだ Moliere の主人公のように，実際われわれは，この節の最初から，それとは認識することなしに，制限 Lorentz 変換に限って語ってきたのである．われわれは引続き，制限Lorentz変換に限って議論することに

---

*) （7－17）式の行列要素からわかるように，行列式 $|\mathbf{L}|$ は実数である．―行列式の展開は，高々同時に2つの虚数の行列要素の積を含むだけである．それゆえ，もう1つの可能性は $|\mathbf{L}| = -1$ だけであるが，これは座標の反転を含む，**非固有**（*improper*）変換に対応している．

†) 制限変換の積はまた制限変換であることを示すことができる（演習問題9参照）．他の3つの類の変換の積は，それらの類の中には留まらない．このように，制限Lorentz 変換のみが群の性質をもつことができる．

し，制限という形容詞は，そうでないということが特に述べられない限り，常に含まれているものとしよう．

平行な軸を持ち，お互いに相対的に一様に運動している，すなわち空間回転を含まない２つの系の間の関係を記述する，制限 Lorentz 変換は，純粋（*pure*）Lorentz 変換，あるいは，隠語で“boost”と呼ばれる．明らかに，（７－17）式で与えられる変換行列は，純粋 Lorentz 変換のものである．制限 Lorentz 変換
p.285 は，純粋 Lorentz 変換と，（お互いの）相対運動をもたない，空間回転とに分解できることは直観的に明らかである．成分の変換を構成する手順を簡単にスケッチしておこう．Lorentz 変換が，純粋変換と，それにつづいて行われる空間回転の積として表わされなければならないとしよう．

$$\mathbf{L} = \mathbf{RP}. \tag{7-28}$$

変換された空間の点の座標 x'_ν は，初めの空間の座標と，つぎの関係式で結ばれている．

$$x_\mu = L_{\nu\mu} x'_\nu \,.$$

プライムのつかない系の観測者にとって，プライムのついた系の原点 $(x'_j = 0)$ はどのような速さで動いているであろうか？その原点の，プライムのつかない座標は，

$$x_j = L_{4j} x'_4, \qquad x_4 = L_{44} x'_4 \,,$$

である．それゆえ，プライムのついた系の原点の相対速度ベクトルは，次の成分をもっている．

$$\beta_j = \frac{x_j}{ct} = \frac{i x_j}{x_4} = \frac{i L_{4j}}{L_{44}} \,. \tag{7-29}$$

そうすると（７－26）式から，次の式が導かれる．

$$L_{44}^2 (1 - \beta_j \beta_j) = 1 \,.$$

L_{44} が実数であることは，直接に，（７－29）式で定義される β が０と１の間にあって，また β のこの値を用いると，L_{44} は

$$L_{44} = (1-\beta^2)^{-1/2} \equiv \gamma\,, \qquad (7-30)$$

の値をもたなければならないことを意味することになる．つぎに，(7—29)式の相対速度ベクトルに対応する純粋 Lorentz 変換 $\mathbf{P}(\boldsymbol{\beta})$ を構成しよう． 逆変換は，行列 $\mathbf{P}(-\boldsymbol{\beta})$ をもっている．それゆえ，行列 $\mathbf{R}$ は積，

$$\mathbf{R} = \mathbf{LP}(-\boldsymbol{\beta}), \qquad (7-31)$$

として構成できることが導かれる． 4×4 行列 $\mathbf{R}$ が，$\mathbf{P}(-\boldsymbol{\beta})$ の行列要素および $\mathbf{L}$ の直交性から導き出されるものとして，空間回転の形をもつということの形式的証明は，演習問題として残しておく．しかしながら，$\mathbf{R}$ が空間回転でしかあり得ないということは明らかである筈である．中間的な，$\mathbf{P}(\boldsymbol{\beta})$ によって定義される座標系は，最後の座標軸系に対して相対的に静止しており，そして $\mathbf{R}$ ができることのすべては，座標軸の回転である．$\mathbf{L}$ の6個の独立な要素のこの分解によって，そのうち3個は相対速度ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の成分によって与えられ，他の3個は $\mathbf{R}$ によって表わされる空間回転を定義する3個のパラメーター，例えば Euler の角，によって表わされることに注意せよ。

2つの純粋 Lorentz 変換を引き続いて適用することは，もちろん，最初と最後の座標系の間の単一の Lorentz 変換と等価である．しかし， 相続く変換の相対速度が平行でない限り，最終的に等価な変換は純粋 Lorentz 変換ではないで
p.286
あろう．上で述べた分解の過程は，2つの純粋 Lorentz 変換の積に対しても行うことができて，2つの相続く“boosts”の結果生じる座標軸の回転があらわな形で得られる．一般に，その過程に含まれる代数は極めて複雑なものであって，普通はその回転行列を実際に示す勇気を失わせる．しかしながら，差支えのない近似が計算上の複雑さを減らし，一方では得られた結果が現代物理学の多くの分野への重要な応用を持っているような1つの特別な場合がある．それは，Thomas の歳差運動として知られている現象である．

3つの座標系を考えよう．O_1 は実験室系，O_2 は O_1 に対して相対的に速度 $\boldsymbol{\beta}$ で動いている系，O_3 は O_2 に相対的に，速度 $\Delta\boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{\beta}'$ で動いている系とする．$\boldsymbol{\beta}$ を O_1 の z 軸に沿って取り，$\boldsymbol{\beta}'$ は O_2 の $y-z$ 平面内にある，すなわち，$\boldsymbol{\beta}$，

$\boldsymbol{\beta}'$ が C　） $y-z$ 平面を定義する，としても一般性は失われない．$\boldsymbol{\beta}'$ の成分は無限小であると仮定し，その最低の，零でない次数の項だけを残せばよいとする．このように，O_2 と O_3 の間の変換に対しては，γ' は 1 で置き換えられる．このことに基づいて，O_1 と O_2 の間の純粋 Lorentz 変換である $\mathbf{L}$ の行列は，（7－18）式の形をもつが，一方 O_2 から O_3 への変換の対応する行列は，

$$
\mathbf{L}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i\beta'_2 \\ 0 & 0 & 1 & i\beta'_3 \\ 0 & -i\beta'_2 & -i\beta'_3 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7－32}
$$

である．ここで β'_2 と β'_3 は $\boldsymbol{\beta}'$ の成分である．同じ近似において，積行列は，

$$
\mathbf{L}'' = \mathbf{L}'\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta\beta'_2\gamma & i\beta'_2\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & -i\beta'_2 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \tag{7－33}
$$

である．$\mathbf{L}''$ が純粋 Lorentz 変換を表わすことができないことは明らかである．純粋 Lorentz 変換では，（7－17）式が示すように，要素 L''_{jk} は対称でなければならない．（7－29）式によって，O_1 と O_3 の間の有効相対速度の零でない成分は，

$$
\beta''_2 = \frac{\beta'_2}{\gamma}, \qquad \beta''_3 = \beta, \tag{7－34}
$$

である*．$(\beta'')^2 = (\beta''_2)^2 + (\beta''_3)^2 \simeq \beta^2$ であり，したがって $\gamma'' \simeq \gamma$ であるから，
p.287
相対速度 $-\boldsymbol{\beta}''$ に対する純粋 Lorentz 変換は，次のように近似される．

---

*) β' を小さいものとして取り扱うことの効果は，β'_3 が β との比較において落とされるということである．

$$\mathbf{P}(-\boldsymbol{\beta}'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) & -i\beta_2' \\ 0 & \dfrac{\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & i\beta_2' & i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \qquad (7-35)$$

最後に，O_3 系での軸の回転を特徴づける回転行列を O_1 から見たものが見出される．いくらかの代数的簡単化を行ない，β' について高次の項を落とすと，それは次のようになる．

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}''\mathbf{P}(-\boldsymbol{\beta}'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) & 0 \\ 0 & \dfrac{-\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7-36)$$

（4－105）式と比べると，$\mathbf{R}$ は，O_3 が O_1 に関して，x 軸のまわりに無限小の角，

$$\Delta\Omega_1 = \frac{\beta_2'}{\beta\gamma}(\gamma-1) = \beta_2''\beta\frac{(\gamma-1)}{\beta^2}, \qquad (7-37)$$

だけ回転されていることを意味することが示される．2つの平行軸Lorentz変換の相続く適用から生じてくる空間回転は，いろいろな点で，“双子のパラドックス”のような，常識を明らかに侵すものとして，もっとしばしば論じられるものと同じくらいパラドックス的であると主張されている．しかし，この特別なパラドックスは，特に原子物理学において重要な応用をもっており，そして多くの実験で証明されている．一定ではない速度 $\mathbf{v}$ で，実験室系で運動している粒子を考えよう．粒子が静止している系は実験室系に対して加速されているから，2つの系は1つの Lorentz 変換で結ばれる筈はない．われわれはこの困難を，しばしば使われる策略によって避けて通ることができる（この手段は，人によっては付加的な相対論の仮定の地位にまで格上げされる）．われわれは，実験室系に相対的に，一様に運動している無限個の慣性系を想像する．

その中の１つが瞬間的に粒子の速度と一致するとする．このようにして，粒子は，実験室系と１つの Lorentz 変換によって結びつけることのできる１つの慣性系において，瞬間的に静止している．この Lorentz 変換はまた，実験室から見たときの，粒子とその真の静止系の性質をも記述するであろう，と仮定される．

さて，O_1を実験室系とし，O_2とO_3を，粒子の運動中の Δt だけ離れた時間に，瞬間的に粒子が静止している２つの座標系とする．（７－34）式によって，p.288実験室系の観測者は，この時間の間の粒子の速度変化，$\Delta\mathbf{v}$, を見るであろう．この変化は y 成分 $\beta_2''c$ だけしか持っていない．最初の z 軸は，$\mathbf{v}$ の方向に選ばれているから，この時間内での無限小回転のベクトルは，次のように書くことができる．

$$\Delta\boldsymbol{\Omega} = -(\gamma - 1)\frac{\mathbf{v} \times \Delta\mathbf{v}}{v^2}\,. \tag{7-38}$$

それゆえ，もし粒子が，それに結びつけられたある特定の方向（例えばスピン・ベクトルのような）を持っているならば，実験室系から，この方向が次の角速度で**歳差運動する**ことが観測されるであろう．

$$\boldsymbol{\omega} = -(\gamma - 1)\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{v^2} \tag{7-39}$$

ここで $\mathbf{a}$ は O_1 から見たときの粒子の加速度である．（７－39）式は，v が十分小さく，γ に対して近似式が使えるときにとる，次の形でしばしば出会うものである．

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2c^2}(\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \tag{7-39'}$$

いずれの形でも，$\boldsymbol{\omega}$ は Thomas の**歳差運動の振動数**として知られている．

7－3　実４次元空間におけるLorentz変換*

*) この書物の残りの部分で必要となる Lorentz 変換の運動学的特徴のほとんどすべては，前節で述べられた．この節と次の節とは，現代物理学のいろいろな部分で，Lorentz 変換を用いるためには重要であるが，相対論的な粒子の古典力学の議論には影響を与えることはないので省略することができる．

光速度を不変に保つという性質はそのままにして，Lorentz 変換はまた，実4次元空間における1次変換と考えることもできる．そのような空間における第4の座標は普通 $x_0 = ct$ によって示される．光が，すべての系で等方的に速さ c をもって伝播するためには，ベクトルの大きさの2乗は，やはり（7－13）式で与えられなければならない．それゆえ，その実空間は Euclid 的であることはできず，次の形の対角型計量テンソル（metric tensor）$\mathbf{G}$ をもつRiemann空間でなければならない．

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (7-40)$$

p.289
ここで，座標の添字は1230の上を動く．（6－26）式から，そのような空間におけるベクトルの大きさの2乗は，

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{G}\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2, \qquad (7-41)$$

で与えられることを思い出そう．これはちょうど（7－13）式と同じである*．同次 Lorentz 変換は，ベクトルの大きさを変えない，この実空間における1次変換である．変換の要素は実であり，したがって $\mathbf{L}$ の要素と同じではないから，実 Lorentz 変換を $\mathbf{\Lambda}$ で示すことにしよう．変換の前後でベクトルが同じ大きさをもつという条件は，

$$\tilde{\mathbf{x}}'\mathbf{G}\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{G}\mathbf{x}, \qquad (7-42)$$

である．ところが，

$$\tilde{\mathbf{x}}'\mathbf{G}\mathbf{x}' = \widetilde{\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}}\mathbf{G}\mathbf{\Lambda}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{G}\mathbf{\Lambda}\mathbf{x},$$

である．したがって（7－42）式が成立するためには，$\mathbf{\Lambda}$ は，

---

*) 大きさの2乗は正でも負でもあり得るから，（7－40）式のような計量テンソルは不定計量（indefinite metric）を定義するといわれる．

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{G}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{G}\,, \qquad (7-43)$$

を満足するようになっていなければならない．(7−43)式は，合同変換(congruence transfoımatıon) $\mathbf{\Lambda}$が計量テンソルを不変に保つということをいっていると読むことができる．(7−43)式のもっと意義のある見方は，Euclid空間(そこでは計量テンソルは**1**である)における直交行列に対する条件，例えば(7−24)式，との類似性に注意することである．事実，(7−43)式は，その計量テンソルが**G**である実Riemann空間における$\mathbf{\Lambda}$の直交条件と考えることができる．

Minkowski空間で表わされた公式と実4次元空間での公式の間の翻訳は，

$$x_4 = ix_0\,, \qquad (7-44)$$

であるから，容易に達成される．そうすると，

$$\Lambda_{j0} = iL_{j4}, \qquad \Lambda_{0k} = -iL_{4k}, \qquad (7-45)$$

が導かれるが，他のすべての要素は変わらないままである．このように，(7−18)式に対応する，zに沿う相対速度をもつ純粋Lorentz変換は，次の実対称行列をもつことになる．

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \qquad (7-46)$$

p.290
前節のすべての運動学的公式は，同じように，困難なく書き換えることができる．**x**と**y**で表わされる2つのベクトルの内積は，今の場合には次のように書かなければならない((6−25)式参照)．

$$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{G}\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}\mathbf{G}\mathbf{x} = x_\mu g_{\mu\nu} y_\nu\,.$$

(直交条件，(7−43)式は，そのような内積が$\mathbf{\Lambda}$変換の下で不変であることを保証する．)

計量テンソルが至る所に表われることを避け，公式を直交空間に対するもの

ともっとよく似たものに作り上げることは，記法を変えることによって可能になる．それには，簡単に Riemann 幾何学へ寄り道をすることが必要になる．座標要素 dx_μ から1つのベクトルを作り，次の型の一般的な座標変換の下におけるその振舞いを考えることにしよう．その変換は，

$$y_\nu = f_\nu(x_1, x_2, \ldots), \qquad (7-47)$$

で与えられる．そのとき，dx_μ の変換性は，

$$dy_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} dx_\mu = \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu} dx_\mu, \qquad (7-48)$$

である．ここで，導関数は，(x)と(y)の間の変換の Jacobi の行列の要素である．1次変換 **A** に対しては，それらは単に行列要素 $A_{\nu\mu}$ になるであろう．他方，勾配ベクトルの要素は次の式によって変換される．

$$\frac{\partial}{\partial y_\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial y_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}. \qquad (7-49)$$

(7－49)式において，今度はその係数は(y)から(x)への逆変換の Jacobi の行列の要素である．(7－48)式におけるように変換されるベクトルは**反変ベクトル**(contravariant vector)と呼ばれ，規約によって上つきの添字が与えられる．すなわち，

$$D'^{\nu} = \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu} D^\mu. \qquad (7-48')$$

一方**共変ベクトル**(covariant vector)は(7－49)式に従って変換され，下つき添字によって示される．

$$F'_\nu = \frac{\partial x_\mu}{\partial y_\nu} F_\mu \qquad (7-49')$$

もし(x)から(y)へ行って再び(x)に戻るならば，最終的な結果は恒等変換である．それゆえ，変換と逆変換の Jacobi 行列の積は単位行列でなければならない．したがって，反変ベクトルと共変ベクトルの内積(点積)は変換の下で不変である．なぜなら，

$$D'^{\nu}F'_{\nu} = \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial x_{\rho}}{\partial y_{\nu}}D^{\mu}F_{\rho} = \delta_{\mu\rho}D^{\mu}F_{\rho} = D^{\mu}F_{\mu}$$

p.291
となるからである．ユークリッド空間では，直交変換の下では，反変ベクトルと共変ベクトルの間に差異はない．すなわち，行列**A**がそのような変換を記述するものとすれば，反変ベクトルは，

$$D'^{\nu} = A_{\nu\mu}D^{\mu},$$

のように変換され，共変ベクトルは，

$$F'_{\nu} = (\mathbf{A}^{-1})_{\mu\nu}F_{\mu} = (\tilde{\mathbf{A}})_{\mu\nu}F_{\mu} = A_{\nu\mu}F_{\mu}\ ,$$

のように変換される．それゆえ，今までは，変換の二つの型を区別する必要は殆どなかった．共変と反変の性質は，容易に高階のテンソルにまで一般化することができる．すなわち，２階の共変テンソル**G**は，

$$G'_{\mu\nu} = G_{\rho\lambda}\frac{\partial x_{\rho}}{\partial y_{\mu}}\frac{\partial x_{\lambda}}{\partial y_{\nu}}, \qquad (7-50)$$

のように変換され，２階の共変テンソルと，２つの反変ベクトルを縮約（contraction）する（例えば $G_{\mu\nu}D^{\mu}F^{\nu}$ を考える）と，同じようにして形を変えないように変換されることを示すことができる．Riemann 空間では，道すじの長さの要素（（6－24）式参照），

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}, \qquad (7-51)$$

が関心をもっている変換の下で不変であるが，計量テンソルは共変テンソルであることが導かれる*. 同じような議論によって，２階の共変テンソルと反変ベクトルとの縮約は，共変ベクトルとして変換される．すなわち，

*) Lorentz変換に対しては，このことはまた，直交条件式（7－43）から直接わかる．それには（7－43）式を，

$$\mathbf{G} = \tilde{\Lambda}^{-1}\mathbf{G}\Lambda^{-1}$$

と書き，**G**の合同変換と見ればよい．

$$F'_\mu = G'_{\mu\nu}D'^\nu = G_{\rho\lambda}\frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu}\frac{\partial x_\lambda}{\partial y_\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_\tau}D^\tau$$

$$= G_{\rho\lambda}\frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu}\delta_{\lambda\tau}D^\tau = G_{\rho\lambda}D^\lambda\frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu}$$

$$= F_\rho\frac{\partial x_\rho}{\partial y_\mu},$$

である．このようにして（そして最後に），われわれの実４次元空間の中の２つの反変ベクトルの点積（内積），

$$g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu{}_1,$$

は，

p.292

$$A_\nu B^\nu,$$

と書き直すことができる．ここに A_ν は共変ベクトルであって，

$$A_\nu = g_{\mu\nu}A^\mu,$$

である．このような具合にして，実４次元空間の位置ベクトルの大きさの２乗は，特に計量テンソルを導入する必要なしに，

$$x_\mu x^\mu$$

と書くことができる．ただ，内積の一方の因子が，計量テンソルとの縮約によって形成される共変ベクトルで置き換えられることだけは，覚えておかなければならない*.

実空間を用いる別の形は，次の計量テンソル，

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \qquad (7-53)$$

*）われわれが，２つの共変ベクトルの内積にかかわっているならば，添字は計量テンソルの逆との縮約によって“上げ”られる．この計量テンソルの逆は，反変テンソルであることを示すことができる．対角型であって，要素±１をもつ，ここで用いられた計量テンソルは，それ自身の逆であって，共変計量テンソルと反変計量テンソルの間に違いはない．

を導入するものである．この場合には，位置ベクトルの大きさの２乗は，

$$\mathbf{x}\,\mathbf{G}'\mathbf{x} \equiv x_\mu G'_{\mu\nu} x_\nu = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + c^2 t^2 \,, \qquad (7-41')$$

である．明らかに，この大きさを保存する変換もまた，光速度を一定に保ち，また対応する Lorentz 変換は，上の Λ と同じでなければならない．以前の定式化は変わらないが，ただ内積の値は符号が変わる．計量テンソル（７－53）式の支持者は，これをとると粒子の力学にでてくる後の公式においていくつかの負号が消えるであろうということを指摘する．他方，この計量は，通常の３次元空間におけるベクトルの大きさと考えられるものからの，不連続な変化を表わすことになる．計量テンソル $\mathbf{G}'$ は，“符号”（ signature ）（－－－＋）をもつといわれ，一方（７－40）式の $\mathbf{G}$ は符号 (＋＋＋－) をもつと言われることがある．それらのテンソルはまたそれらのトレース，すなわち $\mathbf{G}$ に対して＋２，$\mathbf{G}'$ に対して－２で区別することもできる．

重力に関する大部な学術書[†]の中で，Misner, Thorne および Wheeler は複素 Minkowski 空間を消滅させることを求めて，次のように述べている．“特殊相対性理論に早期に関係した人は，$x^4 = ict$ という剣に悩まなければならないだろう”．直交空間を用いることは計量の基本的な不定符号性 ― ベクトルの大きさの２乗が正でも零でも負でもあり得ること ― を覆い隠してしまうということが主張される．さらに，複素直交空間という手段は特殊相対
p.293
性理論に対してのみ可能である．一般相対性理論では空間は曲っており，非直交計量テンソルを用いることを避けることはできない．また，波動関数あるいは状態ベクトルが複素数である量子力学では，複素座標を用いることは，複素共役をとる演算を複雑化するだろう，ということも指摘されている．これらの議論は説得的であるように思われる．（しばしばトレース －2をもつ）不定計量をもつ実４次元空間は，量子力学や素粒子物理学で広く用いられている．

そのような特にすぐれた力には反対することは難かしい．それなのに，われわれはここでは，Minkowski 空間を安楽死させることに対しては反対するで

---

†) C.W. Misner, K.S. Thorne, and J. A. Wheeler, “Gravitation.” 1973, p.51.

あろう．本書では，一般相対性理論も量子力学も議論されないから，われわれはそれらの特別な要求に屈服する必要はないのである． 線素の不定符号性が明白であるか，あるいは隠されているかは実空間でも複素空間でも同じことである．われわれは余りにしばしば，不定符号性をわれわれに押しつけ過ぎただけである．他方，複素Minkowski空間における公式は，通常特に簡単で整然としている．それは，計量テンソルという厄介物や，（ここでは）人工的な共変量と反変量との間の区別を必要としない．それはまた，普通の３次元空間についてのわれわれの経験からの自然な拡張を許すものである．このような理由のために，ここから後では専ら Minkowski 空間の定式化を用いることにしよう．式の大部分は，どちらの空間でも同じであるように見える．ともかく，一方の空間から他方の空間へ転換するのは簡単なことである．われわれは，わずかの例においてだけ実空間を利用するであろう．そこでは，それが特に便利であるからであり（つぎの節におけるように），そのときには殆ど常にトレース ＋2 をもつ計量が用いられる．

7－4　Lorentz 変換のさらに進んだ記述

実の時間座標を用いる方が導出がより簡単な例の１つは，Lorentz 変換と，２×２ 複素行列のある類との間の準同型性を示す場合である．第４－５ 節から，固有空間回転と行列式＋１の（“ユニモジュラー”）ユニタリー複素行列の間に準同型性があったことが思い出されるであろう．空間回転に対して使われたのと非常によく似た方法を用いて，１つの同じような準同型性を，Lorentz変換に対しても示すことができる．

次のように定義される２×２行列 **S** を考えよう．

$$\mathbf{S} \equiv \begin{pmatrix} z+ct & x-iy \\ x+iy & -z+ct \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}. \qquad (7-54)$$

ここで，**S** は（４－59）式で与えられた **P** の１つの一般化であって，エルミート行列である．事実それは，実の x_μ に対して可能な最も一般的なエルミート２×２ 行列の形をしている．われわれは第４－５ 節において，（４－74）式の Pauli のスピン行列は単位行列と一緒になって，２×２エルミート行列の完全基

底の組を形成することを見た．単位行列を $\boldsymbol{\sigma}_0$ と書くと，**S** を簡単にこれら基底の組で表わすことができる．すなわち，**S** は次のように書くことができる．

$$\mathbf{S} = x_\mu \boldsymbol{\sigma}_\mu . \tag{7-55}$$

p.294
ここで和は0から3までにわたる．**S** の行列式は，容易に，

$$|\mathbf{S}| = -x^2 - y^2 - z^2 + c^2 t^2 , \tag{7-56}$$

であることが見出され，したがって，4次元空間における位置ベクトルの大きさの2乗に比例している．**Q** を第4－5節（(4－49)式）におけるように一般の複素2×2行列とする．ただし，ここでは **Q** の行列式が＋1である，すなわち **Q** はユニモジュラーであるという制限がついている．**Q** の要素は一般に複素数であるから，行列式に対する条件は2つの拘束の式を与え，これによって **Q** の独立な要素の数は6にまで減らされる ——— この数は同次Lorentz変換で必要な数と同じである．**Q** を用いて，**S** を次の方式（(4－60)式参照）に従って変換しよう．

$$\mathbf{S}' = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^\dagger . \tag{7-57}$$

Q はユニタリーではないから，これは相似変換ではないが，この変換は **S** のエルミート性を変えないということは簡単に示すことができる．それゆえ，変換された行列 **S**′ は（7－55）式と同じ形を持たなければならない．

$$\mathbf{S}' = x'_\nu \boldsymbol{\sigma}_\nu$$

ここで x'_ν は実数でなければならない．さらに，**Q** はユニモジュラーであるから，**S**′ の行列式は **S** の行列式と同じでなければならない．したがって，**Q** は，光速度を変えないような，座標 x_μ から x'_ν への変換を生成するものであるということができる ——— **Q** は少なくとも Lorentz 変換のある部分類に準同型である．

Q に等価な Lorentz 変換は，固有かつ順時的であることを示すことはできるが，その形式的証明は複雑である*．しかしながら，もっともらしい議論を簡単

*) 例えば，A.O.Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields*, p.23, or A. J. Macfarlane, *Jour. Math. Phys.* 3, 1116(1962)を見よ．

にスケッチすることはできる．第 4−5 節で用いられた手順にしたがえば，$\mathbf{Q}_1$ および$\mathbf{Q}_2$に対応する 2 つの Lorentz 変換を $\mathbf{L}_1$，$\mathbf{L}_2$ とすれば，$\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2$ は $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ に対応することは容易に示される．ここで $\mathbf{Q}_3$もユニモジュラーである．それゆえ，$\mathbf{Q}$ 行列に準同型な Lorentz 変換の部分類は，2 つの Lorentz 変換の積が，やはり同じ部分類の一員になっているようなものである．——— これは“群の性質”のうち最も重要なものである．ところで，われわれは，Lorentz 変換の 2 つの類だけがこの性質を持っていることを見た．それは一般の同次 Lorentz 変換と，制限 Lorentz 変換である．これら 2 つの可能性のうちのどちらであるかを決めるために，(7−57) 式の中の行列の積を腕力にまかせて計算すると，L_{44} は $\mathbf{Q}$の要素によって次のように表わされる ((4−49) 式) ことが示されることに注意しよう．

$$L_{44} = \Lambda_{44} = \frac{1}{2}(\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^* + \delta\delta^*).$$

これは正定符号である．非順時的変換に対しては，L_{44}は負であり，事実 $L_{44} \leqslant -1$ である．したがって，2 つの類のうちで$\mathbf{Q}$行列は制限 Lorentz 変換に
p.295
対してのみ準同型であることができる．これはちょうど，ユニタリー・ユニモジュラー行列は，固有空間回転に対してのみ準同型であるのとちょうど同じである．

再び，3 次元の場合のように，$\mathbf{L}$ と $\mathbf{Q}$ の間には 2 価性の結びつきがあることになる．なぜなら，$+\mathbf{Q}$ と $-\mathbf{Q}$ の両方が同じ Lorentz 変換を与えるからである．それゆえ，この関係は，同型 (isomorphism) というよりはむしろ準同型 (homomorphism) と呼ばれるのである．$\mathbf{Q}$ の要素で表わされた要素 $L_{\mu\nu}$ に対する実際の表式は，(7−57) 式の腕力にまかせた計算によるか，あるいは，もっとすっきりした，上に挙げた Barut および MacFarlane の参考文献に述べられている方法，のいずれかによって求めることができる．しかしながら，純粋 Lorentz 変換に対しては，固有空間回転に対する (4−98) 式に類似して，$\mathbf{Q}$ の簡単な記述がある．(7−57) 式の直接的計算によって，ψ を実数として，ユニモジュラー行列，

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} e^{-\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{\psi/2} \end{pmatrix}, \qquad (7-58)$$

はLorentz 変換

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \cosh\psi - x_0 \sinh\psi, \\ x_0' &= -x_3 \sinh\psi + x_0 \cosh\psi, \end{aligned} \qquad (7-59)$$

に対応することが示される．(7－59)式は，ψ が(7－20)式で定義されているとして，x_3 軸に沿う相対運動に対する，純粋 Lorentz変換，(7－46)式と同じであることが認められるであろう．(7－58)式の中の行列は，また，

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} \cosh\frac{\psi}{2} - \boldsymbol{\sigma}_3 \sinh\frac{\psi}{2}, \qquad (7-60)$$

と書くこともできる．これは z 軸のまわりの空間回転に対する(7－46)式と類似している．この結果は，容易に，任意の純粋 Lorentz 変換にまで一般化される．固有回転が，回転軸の方向と有限な回転角を用いてパラメーター化されたのとちょうど同じように，純粋 Lorentz 変換も，相対速度 の方向にある単位ベクトル $\boldsymbol{\kappa}$ と，(7－20)式で定義される“角”ψ を用いて記述することができる．(7－11)と(7－12)式の Lorentz 変換のベクトル形は，これらのパラメーターを用いて次のように書き換えることができる．

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\kappa}(\cosh\psi - 1) - \boldsymbol{\kappa} x_0 \sinh\psi, \qquad (7-61)$$

$$x_0' = -(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r})\sinh\psi + x_0 \cosh\psi. \qquad (7-62)$$

(7－61)式は，まったく，有限回転公式(4－92)の形を思い起こさせるものである．与えられた方向 $\boldsymbol{\kappa}$ の相対運動への，式(7－60)の明らかな拡張は，

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa}, \psi) = \mathbf{1} \cosh\frac{\psi}{2} - \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\sigma} \sinh\frac{\psi}{2}, \qquad (7-63)$$

p.296
であって，これは空間回転に対する(4－98)式と比較されるべきものである.*

*) 固有回転の場合とちがって，2つの共線でない(noncollinear)純粋Lorentz変換の積は，純粋Lorentz変換ではないから，“Eulerの角”に類似したどんな量も導入することはできない．

（7－63）式の形は，純粋Lorentz 変換に対する$\mathbf{Q}$行列はエルミート型であるが，一方，固有回転に対してはそれらはユニタリーであることに注意しよう．純粋回転のときと同じように，（7－63）式は，純粋 Lorentz 変換の $\mathbf{Q}$ 行列に対する指数関数表示を暗に意味している．すなわち，

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\kappa},\psi)=\exp\left[-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\psi/2)\right], \qquad (7-64)$$

と書くことができる．制限Lorentz 変換は，ブーストと（boost）と空間回転の積であるから，（7－64）と（4－99）式を結びつけて$\mathbf{Q}$行列の対応する形を得ることができる．すなわち，

$$\mathbf{Q}(\mathbf{n}\Phi,\boldsymbol{\kappa},\psi)=\exp\left[i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\Phi/2)\right]\exp\left[-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\psi/2)\right] \qquad (7-65)$$

である．もちろん，指数関数は単に級数表示を表わしているに過ぎないことを覚えておかなければならない．

われわれが，2つの純粋Lorentz 変換の積を,空間回転と1つの純粋Lorentz 変換の積に分解しようとする時に，Lorentz変換のユニモジュラー表示の利点が明らかになる．すでに指摘したように，直接の掛け算から，有効速度と回転ベクトルを引き出すことは，恐るべきほど厄介な代数の演習問題である．$\mathbf{Q}$行列の形では，やはりかなりの演算は必要であるが，それははるかに簡単になる（演習問題13を見よ）．

空間回転において，無限小変換は非常に重要な役割を演ずるので，Lorentz 変換に対してそれに対応するものを探すことは自然なことである．われわれはすでに，Thomasの歳差運動を導くさいに，無限小Lorentz変換を用いた（（7－32）式参照）．空間回転の場合ほど直接的に有用であるというわけではないが，無限小 Lorentz 変換は，Lorentz 変換の数学的な群論的構造に対する特徴づけを与えるような応用においては価値がある（このことは第9－7節において見られるであろう）．$\boldsymbol{\kappa}$とψを用いれば，実の純粋Lorentz変換は次の形をとる（（7－61）と（7－62）式から直接に，あるいは（7－17）′式を経由してのいずれでもよい）．

$$\Lambda_{ij} = \delta_{ij} + \kappa_i \kappa_j (\cosh\psi - 1),$$
$$\Lambda_{i0} = \Lambda_{0i} = -\kappa_i \sinh\psi, \qquad (7-66)$$
$$\Lambda_{00} = \cosh\psi.$$

無限小純粋 Lorentz 変換は，2つの系の間の無限小の相対速度，あるいは，同じように無限小の“角”$\Delta\psi$ によって特徴づけられる．(7－66)式から，無限小純粋 Lorentz 変換は，次のように書くことができる．

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\delta}. \qquad (7-67)$$

p.297
ここに，

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\kappa_1 \Delta\psi \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_2 \Delta\psi \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_3 \Delta\psi \\ -\kappa_1 \Delta\psi & -\kappa_2 \Delta\psi & -\kappa_3 \Delta\psi & 0 \end{pmatrix},$$

である．空間回転に対する(4－117)式に類似して，われわれは次の式によって，無限小純粋 Lorentz 変換に対する生成行列の概念を導入することができる．

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (7-68)$$

$\mathbf{K}_i$ を用いれば，無限小行列 $\boldsymbol{\delta}$ は非常に簡単に，

$$\boldsymbol{\delta} = -\kappa_i \mathbf{K}_i \Delta\psi,$$

と書くことができ，行列 $\mathbf{x}$ として書かれる実4次元空間のベクトルの，無限小純粋Lorentz 変換の下における，変化は，

$$\Delta\mathbf{x} = -\kappa_i \mathbf{K}_i \mathbf{x} \Delta\psi, \qquad (7-69)$$

によって完全に与えられる．（７－69）式は，実質的には，有限な純粋Lorentz 変換を生成するための微分方程式を構成している．

空間回転は，Lorentz 変換の部分群であるから，われわれはこれらに，Λ 定式化における無限小空間回転の生成演算子を付け加えるべきである．この生成演算子は，（４－117）式で定義された $\mathbf{M}_i$ と添字０をもつ第４番目の行と列を付け加えることを除いては，同じである．$\mathbf{M}_i$ の Lie 括弧式すなわち交換子はこの外見を除いては変わらないままである．

$$[\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{M}_k. \qquad (4-118)$$

直接掛け算をやってみれば，$\mathbf{K}_i$ が次の交換関係を満足することが証明されるであろう．すなわち，

$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = -\epsilon_{ijk}\mathbf{M}_k,$$

および　（７－70）

$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{M}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{K}_k.$$

（４－118）と（７－70）式は一緒にして，制限 Lorentz 群の Lie 代数を定義し，その群を特徴づける刻印として働らく．驚くべきことだが，われわれはそれらが，非相対論な Kepler 問題における有界でない運動を論ずるときに現われることを見出すであろう（第９－７節を見よ）．

p. 298

7－5　共変４次元形式

正しくない Galilei 変換に代わるべきLorentz 変換が得られたので，いよいよ第２の段階に進んで，力学の法則が物理学のすべての法則と共に，一様に運動するすべての系に対して同じ形をもつ，という要求を持ち出すことができる．物理学の法則が，Lorentz変換の下で不変であることを調べるためには，それらの法則を前の数節で導入した４次元世界の言葉で書き表わすと大変容易になる．実際，後で示すように，そのようにすれば，与えられた方程式のLorentz 不変性を単に視察によって証明することができる．

Lorentz変換に対する形の不変性は，物理学の法則に対して要求されるただ

1つの不変な性質ではない．明らかに，ある与えられた関係式の物理的な内容は，空間軸の方向の特別な選び方に影響されてはならない．いい換えれば，物理学の法則は，空間の剛体的な回転，すなわち空間的な固有直交変換に対してもまた，不変でなければならない．このような，さらに親しみ深い不変性の要求を調べてみることによって，Lorentz 変換に対する不変性を確立するために踏むべき手順が明らかにされるであろう．

普通，われわれは空間の回転に対する理論の不変性について心配することはない．どんな方程式を作る場合にも，常にその方程式の各項は，**すべて**スカラーであるか，あるいはベクトルであることが要求される．すなわち，一般に方程式の各項は，同じ階数のテンソルでなければならないが，この要求が回転に対する不変性を自動的に保証している．すなわち，一般にスカラー的な関係式は，

$$a = b\,,$$

の形を持っているが，この方程式の両辺はスカラーであって，空間的な回転に対して不変であるから，この関係式は明らかにすべての座標系において成立する．また，

$$\mathbf{F} = \mathbf{G},$$

の形のベクトル的な関係式は，実際にはベクトル成分の間の3つの別々な関係式，

$$F_i = G_i\,,$$

を表わしている．もちろん，これらの成分の値は，空間的な回転に対して不変ではなく，それらは変換されたベクトル $\mathbf{F}',\mathbf{G}'$ の成分である新しい値 F'_i, G'_i に変換される．しかし，成分の間の関係式の両辺は同じように変換されるので，変換された成分についても，同じ関係式，

$$F'_i = G'_i\,;$$

が成立しなければならない．このように，2つのベクトルの間の関係は，空間的な回転によって乱されることはなく，新しい系においても，やはり，

$$\mathbf{F}' = \mathbf{G}',$$

が成立する．関係式の形が変わらないのは，全くこの式の両辺が共にベクトルとして，同じように変換されるという事実の結果であることに注意しよう．こp.299のような場合，方程式の各項は**共変的**（*covariant*）であるといわれる*．同じように，2つの2階テンソルの間の関係式，

$$\mathsf{C} = \mathsf{D},$$

は，必然的に，変換された2つのテンソルの間にも，同じ式，

$$\mathsf{C}' = \mathsf{D}',$$

が成立することを意味する．なぜなら2つのテンソルは，空間的な回転に対して，共変的に変換されるからである．他方，ベクトルの1つの成分と，例えばテンソルの1つの成分とを別々に含んでいるような方程式は，明らかに3次元の直交変換に対して，その形を不変に保つことはできない．すなわち，空間座標系の回転に対する物理法則の不変性は，その方程式の各項が，3次元の直交変換に対して共変的であることを要求する．

さて，制限 Lorentz 変換は，Minkowski 空間あるいは世界空間における1つの直交変換にほかならないことが前に示された．われわれはすでにこの4次元空間におけるスカラーやベクトルを取扱った．同じように，われわれはこの空間の中に，3次元の変換の明らかな一般化であるような変換性をもつ他の階数のテンソルを作り上げることができる．これらのいろいろな階数をもつテンソルは，**世界スカラー**，**世界ベクトル**（あるいは4元ベクトル），等から出発して一般に**世界テンソル**と呼ばれる．そうすれば，どのような物理法則でも，その法則が**共変4次元形式**（*covariant four-dimensional form*），すなわち，方程式に含まれるすべての項が，同じ階数の世界テンソルであるような形

---

*) ここで用いられた“共変”という言葉は，第7−3節で用いられた“共変変換”（*covariant transformation*）とは全く何の関係もない．不幸にして，われわれはここで2つの全く別々の概念に対して，数学者と物理学者が同じ言葉を用いるという他の例に出会ったことになる．しかしこれらの慣用は，今から変えるには余りにも定着し過ぎている．

に書かれさえすれば，Lorentz 変換に対するその形の不変性は直ちに明らかになる．等価性の原理の要求を満足しない法則は，共変形式に書くことはできない．このように，物理法則を表わす方程式の各項の4次元的な変換性は，その法則が相対論的に成立するかどうかを調べる試金石になる．

4元ベクトルの最も簡単な例は，成分 (x_1, x_2, x_3, x_4) をもつ Minkowski 空間の中の1つの“点”の位置ベクトルである．世界点の4つの座標は，あることが普通の空間の**どこで**起こったか，そしてそれが**いつ**起こったか，を教えてくれるから，多分4次元空間の点を**出来事**（*event*）と呼ぶ方が事実をよりよく記述しているであろう．われわれはしばしば世界空間について語るときに，3次元の術語を用いるけれども，その意味には重要な物理的な違いがあることは覚えておく方がよい．

1個の質点が，通常の3次元空間の中を運動するときには，4次元空間においてそれに対応する点は**世界線**（*world line*）として知られている1つの径路を描く． 4元ベクトル dx_μ は， 世界線に沿う微小な運動に対する， 4元位置ベクトルの変化を表わす．dx_μ とそれ自身との内積から， 1つの世界スカラー（したがって，それはLorentz 不変量である）を作ることができる．そのスカラーは $d\tau$ と書かれ，

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} dx_\mu dx_\mu \,, \qquad (7-71)$$

p.300
によって定義される．$d\tau$ の意味は，その質点が瞬間的に静止しているような Lorentz 系で，（7－71）式を計算してみれば明らかになる．そのような系では，変換されたベクトルの成分 dx'_μ は $(0, 0, 0, icdt')$ となるから，不変量 $d\tau$ は

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2} dx'_\mu dx'_\mu = (dt')^2$$

で与えられる．このように $d\tau$ は，質点と共に動く時計で測った時間間隔である*．したがってそれは，質点の**固有時**（*proper time*）あるいは**世界時間**（*world time*）の間隔と呼ばれている．

---

*) $d\tau$ としては（7－71）式の正の平方根をとるものと定義する．平方根の中の負号は，トレース－2の計量を用いるならば消すことができる．（7－53）式を見よ．

$d\tau$ で測られた時間間隔と，与えられたLorentz座標系で測られた時間間隔との関係は，定義の式（7－71）を展開することによって直接導き出すことができる．すなわち，

$$(d\tau)^2 = -\frac{1}{c^2}((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2),$$

あるいは，

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]},$$

となるが，これは次の関係式と等価である．

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = dt. \qquad (7-72)$$

（7－72）式の中に記号 β を用いることは混乱を招くように思われるかも知れない．ここまでは β は，専ら，Lorentz変換で結びつけられている2つの慣性系の相対速度（c を単位とした）に関係して用いられてきた．ここでは，それを1つの慣性系（実験室系）で観測される質点の速度を表わすのに用いようとしている．実際には，この使い方は，質点に関して瞬間的に静止しているLorentz系を用いて考えることによって，つじつまが合わされる．これはすでにThomasの歳差運動との関係で言及したことである．β は，観測者の系と瞬間的静止系の間の相対速度であると共に，質点の観測される速度でもある．（7－72）式は，粒子が静止していない系で測られた時間間隔は，粒子が静止している系で観測された対応する時間間隔よりも常に長い．これは，今日ではよく知られ，また広く実験的に証明されている“時間の延び”（*time-dilatation*）の1つの例である．その最も著しい実験的証明は，走っている間に崩壊する不安定な粒子の寿命の測定である†．

p.301

すでに言及したように，4元ベクトルの大きさの2乗は必ずしも正定符号ではない．大きさの2乗が正かあるいは零である4元ベクトルは空間的（*space－like*）であると呼ばれる．大きさの2乗が負であるときにはそれらは時

† R.D.Sard, *Relativistic Mechanics*, 1970, pp.96－100 の中の議論を参照せよ．

間的(*time-like*)ベクトルとして知られている．このような特徴は，世界スカラーであるベクトルの内積から生ずるものであるから，このような名前のつけ方はLorentz 変換の下で明らかに不変である． この名前は，空間的ベクトル2乗は常に正定符号であり，空間的4元ベクトルは，後に見るように，第4成分が零になるように変換することが常に可能である，ということに由来する．他方，時間的4元ベルトルは常に第4成分を持っていなければならないが，それは最初の3つの成分が零になるように変換することができる．このような概念の1つの例として，2つの4元位置ベクトルの差は空間的あるいは時間的のいずれでもあり得ることに注意しよう． X_μ をこの差を表わすベクトルとし，

$$X_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu},$$

で定義されるものとしよう．ここで添字1と2は2つの出来事を指示するものである．X_μ の大きさの2乗は，

$$X_\mu X_\mu = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 - c^2(t_1 - t_2)^2,$$

で与えられる．それゆえ， X_μ は，もし2つの世界点が，

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 \geq c^2(t_1 - t_2)^2,$$

を満たすように隔っていれば空間的であるが，もし，

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 < c^2(t_1 - t_2)^2,$$

であれば時間的である．位置ベクトルの差が時間的であるという条件は，この2つの出来事の間の距離を，光の信号で結びつけることができるというのと同じことである．またもし2つの世界点が空間的なベクトルの差だけ隔っていれば，その2つの点は速さ c で進むどのような波によっても結ぶことはできない．

空間軸を，$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ が z 軸の方向にあるようにとることは常に可能である．そうすると $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ は $z_1 - z_2$ に等しい．その場合には，z 軸に平行に速さ v で運動する系への Lorentz 変換に対しては，X_μ の第4成分は(7－5)式によって次のように変換される．

$$c(t_1' - t_2') = \frac{c(t_1 - t_2) - \dfrac{v}{c}(z_1 - z_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}\text{.}$$

もし，X_μ が空間的であって，その出来事が $t_2 > t_1$ で示されるようなものであるならば，

$$c(t_1 - t_2) < z_1 - z_2,$$

であって，そのときには，上に述べたように $ic(t_1' - t_2') \equiv X_4'$ が零になるような速度 $v < c$ を見出すことができる．物理的には，X_4' が零になるということは，もし 2 つの出来事の間の距離が空間的であるならば，この 2 つの出来事が同時であるような Lorentz 系が常に見出される，ということを意味する．他方，p.302 2 つの出来事の間の隔たりが時間的である場合に対しては,それら 2 つの出来事を同時にするか，あるいは，もっと強く，2 つの出来事の時間的順序を変えるような，Lorentz 変換を見出すことはできない．このように，“前”および“後”という概念は Lorentz 変換の下で不変であって，因果律は保たれている．空間的な隔たりをもつ一連の出来事の時間の順序を逆にすることができるということは因果律を犯すことにはならない，なぜなら，1 つの出来事が他の出来事に影響を及ぼす方法はないからである．例えば，今地球上ですることのできるどんなことも，10 光年離れている星のまわりをまわる惑星の上で 10 年以内に起こる出来事に影響を与えることはできない．

4 元ベクトルの例は，ほかにも容易にふやすことができる．例えば 4 元速度 (four-velocity) u_ν は質点の 4 元位置ベクトルが，その質点の固有時間に対して変化する割合であるとして，次のように定義される．

$$u_\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau}\text{.} \qquad (7-73)$$

この 4 元速度の空間および時間成分は，

$$u_i = \frac{v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{および} \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad (7-74)$$

である．また世界速度の大きさは一定である．なぜなら，和 $u_\nu u_\nu$ は，

$$u_\nu u_\nu = \frac{v^2}{1-\beta^2} - \frac{c^2}{1-\beta^2} = -c^2, \qquad (7-75)$$

で与えられるからである．そしてこの式からわかるように u_ν は時間的なベクトルである．

電流密度 $\mathbf{j}$ と，ρ を電荷密度として，$ic\rho$ はまた合わせて4元ベクトル j_μ を構成する*．電荷と電流に対する連続の方程式，

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

は，Minkowski 空間の言葉では

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \qquad (7-76)$$

と書くことができる．われわれは既に（381 ページで），4次元勾配演算子は，Minkowski 空間では，4元ベクトルとして変換されることを見た†．それは，$\mathbf{L}$ に対する直交性の条件によって，

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = L'_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = L_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad (7-77)$$

となるからである．それゆえ，（7－76）式の左辺は4元ベクトルの4次元発散（four-divergence），すなわち世界スカラーであって，したがって Lo-
p.303
rentz 変換の下で不変である．ここで，われわれは，物理学の法則を Minkowski 空間の言葉に書き換えると，どのようにして，明白にその Lorentz 不変性を示すことができるかという1例を得た．

他の例は，一緒になって4元ベクトル $A_\mu \rightarrow (\mathbf{A}, i\phi)$ を構成する，電磁ベクトルおよびスカラー・ポテンシャルを含むものである．ポテンシャルが Lorentz のゲージ条件（gauge condition），

---

*）j_μ は，電荷が静止しているような系での電荷密度すなわち"固有電荷密度"を ρ_0 とすると，単に4元ベクトル $\rho_0 u_\mu$ である．Panofsky and Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, あるいは，Jackson, *Classical Electrodynamics*. を見よ．

†）非直交空間では，それは（数学者の言う意味で）共変的に変換され，こう考えると，（7－76）式は共変ベクトルと反変ベクトルの不変な内積である．

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0, \qquad (7-78)$$

を満足するならば，それらは別々に次の形の波動方程式を満足する．

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}&=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\\ \nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}&=-4\pi\rho.\end{aligned} \qquad (7-79)$$

（上に引用したPanofsky and Phillipsあるいは Jackson の書物を見よ）．Minkowski 空間の言葉では，Lorentz 条件は，明白に共変な形，

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0, \qquad (7-80)$$

と書くことができる．3次元のデル（del）演算子 ∇ の明らかな一般化として，4次元勾配演算子は記号□で示される．□のそれ自身との内積，$\Box^2$（これは**ダランベルシャン**（*D'Alembertian*）として知られている）は，それゆえ，次のような世界スカラー微分演算子である．

$$\Box^2=\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial x_\mu}=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

それゆえ，波動方程式の組，（7－79）式は明らかに共変な世界ベクトル方程式として次のように書くことができる．

$$\Box^2A_\mu=-\frac{4\pi j_\mu}{c}. \qquad (7-81)$$

ゲージ条件と波動方程式をそれぞれ（7－80），（7－81）式のような形に書くことができるという，正にそのことが，Maxwellの電磁理論が，Galilei の相対性とではなく，特殊相対性と調和していることを示すのに十分である．

7－6　相対論的力学における力とエネルギー方程式

われわれは，Newton の運動方程式が，Galilei 変換に対しては不変であるが，Lorentz 変換に対しては不変ではあり得ないことを知った．それは，特殊相対

性理論の共変性の要求を満足するような力の法則を与えるように，適当に一般 p. 304 化されなければならない．もちろん，われわれの求めている一般化は，速度が c に比べて小さい場合には、1つの質点に対する新しい方程式がよく知られている運動方程式，

$$\frac{d}{dt}(mv_i) = F_i \ , \qquad (7-82)$$

の形になるようなものでなければならない．

さて，4元ベクトルの空間成分は，それ自身1つの空間ベクトルを形作っている．なぜなら，$L_{4i} = L_{i4} = 0, L_{44} = 1$ であるようなLorentz 変換は，単に通常の3次元空間における回転であって，4元ベクトルの空間成分だけに影響を与えるからである．しかしその逆は必ずしも真でない．すなわち3次元空間のベクトルの成分は，必ずしも4元ベクトルの空間成分と同じように変換されるとは限らない．通常のベクトルの各成分に，β の任意の関数を掛けても，そのベクトルの空間的な回転に対する変換性は変わらないけれども，Lorentz 変換に対する変換性は致命的な影響を受ける[*]．例えば，世界速度 u_ν の空間成分は，3次元のベクトル $\mathbf{v}/\sqrt{1-\beta^2}$ を形成するけれども，$\mathbf{v}$ 自身は4元ベクトルの部分ではないことに注意しよう．4元ベクトルの成分にするためには，それをまず $\sqrt{1-\beta^2}$ で割っておかなければならないのである．

ところで，(7－82)式それ自身は，Lorentz 不変ではない．したがって，その相対論的な一般化は，4元ベクトルの方程式であって，$\beta \to 0$ の極限でその空間成分が，(7－82)式になるようなものであると期待することができる．(7－82)式の左辺の4元ベクトル的な一般化を見出すことは困難ではない．速度が小さい場合に，空間成分が $\mathbf{v}$ になるような4元ベクトルは世界速度 u_ν だけである．さらに m は，質点のもつ座標変換に対して不変な性質と考えることができるけれども，時間 t はLorentz 不変ではないことがわかっている．しかし t は，明らかに $\beta \to 0$ と共に t になるようなスカラーの固有時間 τ で置き換えることができる．したがって，われわれの求めている1個の質点に対す

---

*) 上に述べたように，β（あるいは $\mathbf{v}$）は，実験室系から見た質点の速度，あるいは質点が瞬間的に静止しているLorentz 系の速度の両方の意味に使われる．

るNewtonの運動方程式の一般化は，

$$\frac{d}{d\tau}(mu_\nu) = K_\nu, \qquad (7-83)$$

の形で与えられるようなものでなければならない．ここでK_νはある4元ベクトルであって，**Minkowski の力**として知られている．

K_νの空間成分が力の成分と同じであると考えてはならない．(7－82)式から要求されることは，ただ速度の小さい極限において，K_iがF_iに等しくならなければならないということだけである．したがって，K_iは，F_iと$\beta\to 0$で1になるようなβの任意の関数の積であってもよい．正しい関係式は，明らかに，力の成分のLoretz変換に対する変換性に関係する．Lorentz 変換に対する**F**の振舞いを定めるために，過去において2通りの方法が用いられた．

1つの方法は，力が基的には2, 3の物理的な源からのみ生じるということを指摘することから出発する．すなわち，力は，重力的なものか，電磁気的なものか，あるいは恐らく核力であるかのいずれかである，と考えられる．これらの物理現象に関する正しい理論の役目は，それに関係している力に対する表式を与えることであって，この表式は，もしそれが共変形式に表わされるならば，自動的に力の成分の変換性を教えてくれる．不幸にして，われわれはすべての力の源に対する共変理論を持っていない．事実，核力に対しては語るに足る程のどんな理論も持ち合わせていない．ただ古典的な電磁気学の理論だけが，共変形式の力の方程式を与えることを期待することができる．というのは，Lorentz変換は，特にこの理論の不変性を保つように作り上げられたものであるからである．しかし，われわれの目的のためにはこれだけで十分である．力の変換性は，その源がどのようなものであろうと，すべての力に対して同じでなければならないからである．“質点が2つの力の作用を受けてつり合っている”という命題は，すべての Lorentz 座標系において真でなければならないが，このことは，すべての力が同じように変換される場合に限って成立するのである．

p.305

第1－5節において，質点に作用する電磁力は，

$$F_i = -q\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\phi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right) + \frac{1}{c}\frac{dA_i}{dt}\right), \tag{7-84}$$

で与えられることを指摘した（（1－64′）式参照）．4元ベクトル・ポテンシャル A_μ を用いれば，$\phi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$ という表式は，次のような共変形に書くことができる．

$$\phi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\sqrt{1-\beta^2}\,u_\nu A_\nu. \tag{7-85}$$

そうすると，力の成分 F_i は，

$$F_i = -\frac{q}{c}\sqrt{1-\beta^2}\left(-\frac{\partial}{\partial x_i}(u_\nu A_\nu) + \frac{dA_i}{d\tau}\right), \tag{7-86}$$

となる．括弧の中の式は，4元ベクトルの空間成分のように変換されるから，F_i は $\sqrt{1-\beta^2}$ と4元ベクトルの空間成分との積である．この4元ベクトルが，Minkowskiの力 K_μ であると認められるべきものである．それゆえ，通常の力と，Minkowskiの力との関係は，力の起源とは無関係に，

$$F_i = K_i\sqrt{1-\beta^2}, \tag{7-87}$$

でなければならない．この導き方の副産物として，荷電粒子に対するMinkowskiの力の特別な形が次のように得られる．

$$K_\mu = \frac{q}{c}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}(u_\nu A_\nu) - \frac{dA_\mu}{d\tau}\right). \tag{7-88}$$

もう1つの別の方法は，力学自身の範囲を越えた物理学の理論を用いることを避けようとするものである．この場合には，単に力を，すべてのLorentz系において運動量の時間的変化の割合であるとして定義し，

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i, \tag{7-89}$$

とおく．しかしながら，（7－89）式に示されている運動量 p_i は mv_i ではなく，むしろ相対論的に一般化された運動量であって，小さい速度の極限において mv_i になるようなものである．Lewis とTolman[*] は，（7－89）式の定

p.306

*) R.D.Sard, *Relativistic Mechanics*, pp. 146－152を見よ．

義がLorentz不変である結果として，外力の作用していない場合に，運動量の保存則が導かれることに注目して，力の法則（7－83）式には無関係に，相対論的な運動量に対する表式を得た．かれらは，2つの質点の間の弾性衝突を調べ，そのような衝突において，すべてのLorentz座標系において保存されるような p_i の形を見出したのである．しかし力の法則の形として，（7－83）式を受け入れることにすれば，相対論的な運動量の形，および K_i の意味は，（7－83）式をできるだけ（7－89）式によく似た形に書くことによって直ちに見出すことができる．τ と t との関係および世界速度の定義から，（7－83）式の空間成分は，次の形に書くことができる．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = K_i\sqrt{1-\beta^2}.$$

これを（7－89）式と比べると，運動量の保存則は，運動量が，

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{7-90}$$

で定義されているとすれば，不変であり，また F_i と K_i は（7－87）式の関係で結ばれていることがわかる．（7－90）式は，$\beta\to 0$ のときには正しく mv_i になることがわかるであろう．このように，2つの方法はいずれも同じ結論を与える．（7－90）式と，4元速度を定義する（7－74）式を比較すると，p_i は，4元運動量と呼ばれる次の4元ベクトルの空間部分であることが示される．

$$p_\nu = mu_\nu. \tag{7-91}$$

このようにして1個の質点に対する一般化された運動方程式は，

$$\frac{dp_\nu}{d\tau} = K_\nu, \tag{7-83'}$$

のように書くことができる．

ここまでは，4元ベクトル方程式（7－83），（7－83′）の空間部分だけを論じ，第4番目の方程式の物理的意味については何もいわなかった．4元ベクトル K_μ の時間的な部分は，（7－83）式と世界速度との内積，

$$u_\nu \frac{d}{d\tau}(mu_\nu) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{m}{2}u_\nu u_\nu\right) = K_\nu u_\nu \,, \tag{7-92}$$

から直接得ることができる．u_ν の大きさの２乗は定数 $-c^2$ であり((７－75)式参照)，またここで，m も同じように定数であるから，(７－92)式の左辺は零になり，したがって，

$$K_\nu u_\nu \equiv \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{1-\beta^2} + \frac{icK_4}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0, \tag{7-93}$$

p.307
が得られる．それゆえ，Minkowski の力の第４成分は，

$$K_4 = \frac{i}{c}\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{7-94}$$

となり，これに対応する(７－83)式の第４成分は，

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}, \tag{7-95}$$

となる．さて，運動エネルギーTは，一般に力が質点に対して，単位時間当りになす仕事 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ が T の時間的増加の割合に等しくなるように定義される．すなわち，

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}, \tag{7-95'}$$

である．これは，通常の非相対論的な場合の形 $\frac{1}{2}mv^2$ と一致する運動エネルギーの１つの表式である．相対論的な表式は，これと比べることにより，(７－95)式から得られる．このようにして，(７－95)式は，

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{7-96}$$

としたときのエネルギー方程式であることがわかる．β^2 が１に比べて非常に小さい極限では，(７－96)式は次のように展開することができる．

$$T \to mc^2\left(1+\frac{\beta^2}{2}\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \tag{7-97}$$

この極限値は，期待された非相対論的な形とは一致せず，mc^2 という項が付け加わっている．しかしながら，ちょっと見た所では，この定数は重要ではない

ように思われる．というのは，明らかに（7－96）式の右辺に任意の積分定数を加えても，（7－95′）式が成立することに変わりはないからである．特に，その定数を $-mc^2$ にとることもできる．そうすれば，T を非相対論的な値と一致させることができる．

それにもかかわらず，T を（7－96）式のように定義しておく方が好ましいのである．なぜなら，（7－91）と（7－96）式を比較してみると，iT/c は4元運動量の第4成分であることが示されるからである．非相対論的な値へ正しく移るためには，“運動エネルギー”という名前を，次式で定義される別な量 K に移す方がよい．

$$K = T - mc^2 = mc^2(\gamma - 1). \qquad (7-96')$$

T に対する決まった呼び方は文献の中にはない．厳密には，それは相互作用のない1個の質点に対してのみ適当なものだが，それは時には“全エネルギー”と呼ばれることがある．それはまた，しばしば単にエネルギーと呼ばれることもあるであろう．

名前は何であれ，T は興味深い有用な性質を持っている．例えば，（7－96）式によって与えられる T は，線運動量が保存されるような状況では，T もまた保存されなければならないという有利な性質を持っている．この定理
p.308
を証明するためには，単に，“線運動量が保存される”という命題が，Lorentz 変換の下で不変でなければならない，ということに注意するだけでよい（実際，この不変性は慣性系の Einstein の定義の中に暗黙のうちに含まれている．368ページ参照）．線運動量の変換された成分 p'_j は p_i と T の1次関数として与えられる．それゆえ，すべての Lorentz 系に対する p'_j の保存は，p_ν のすべての成分の結びついた保存を要求する．これが，われわれの求めていた結論である．

非相対論的力学では，線運動量の保存と運動エネルギーの保存とは別々な事柄であった．事実，第3章において，非弾性衝突あるいは反応では，反応体の線運動量は保存されるが，運動エネルギーは保存されないということを見た．しかしながら，相対論的運動エネルギーは，世界ベクトルの第4成分としての

その変換性のゆえに，非弾性衝突においてさえも，線運動量と共に保存されなければならない．**静止エネルギー**（*rest energy*）として知られている mc^2 という項は，それゆえ重要な物理的意義をもっている．

簡単な例によって，T の保存は，弾性的でない反応あるいは衝突の結果として系の静止質量を変化させる，ということが示されるであろう．例えば，等しい質量の2個の粒子あるいは系が，実験室系において，同じ大きさであるが反対向きの速度でお互いに運動していると考えよう．それゆえ，実験室系では全線運動量は零である．われわれは系に対する全4元運動量を次のようにして作ることができる．

$$P_\mu = p_\mu(1) + p_\mu(2).$$

ここで，上に述べたことから，空間成分は零であるが，第4成分は $2iT/c$ である．ここに T は（7－96）式で定義されるような各粒子のエネルギーである．さて，衝突は完全非弾性的であるとしよう ― すなわち，衝突後には2つの粒子は，2個の粘土の球が衝突してくっつくように，実験室系で完全に静止するようになるとしよう．その時には，全エネルギーは，最後の複合系の静止エネルギーである．その系の質量は，

$$M = 2m + \Delta M$$

と表わせる．衝突における P_4 の保存は，

$$2T = Mc^2 \qquad (7-98)$$

であることを意味する．さて，2個の粒子に，実験室系で，静止の状態からそれらの最初の速度を与えるためには，次のエネルギーが必要である．

$$\Delta E = 2(T - mc^2) = \Delta Mc^2 \qquad (7-99)$$

このように，実験室系における最初の運動エネルギーは非弾性衝突によって，すべて，Einstein の有名な関係式（7－99）にしたがって，すべて系の静止質量の増加に転換される．

衝突する2個の粘土球の場合には，通常，われわれは衝突で失われた運動のエネルギーは，熱に転換されたという．特殊相対性理論がわれわれに教えるこ

とは，系の静止質量，あるいは慣性が，発生した熱量に比例して増加するとい
p.309
うことである．原理的には，質量の増加は，もし系がある既知の力によって運動させられるならば，検出することができる*．原子あるいは原子核のスケールでは，例えば運動の入射エネルギーが，新しい第３の粒子の創成に使われることがある．現代物理には，似たような例が沢山ある．そのような衝突の相対論的運動学のいくつかは，次の節の中に見出されるであろう．もちろん，その過程は逆の道をたどることもできる ― すなわち，静止エネルギーの運動のエネルギーへの転換がそれである．地球的な規模での最も著しい例は，多分人工的な核爆発によって与えられるものである．このときも核装置あるいは核兵器の全エネルギー T は，爆発の過程を通じて一定に保たれる．大量の運動エネルギーは，含まれている物質の静止質量の減小によってのみ解放される．ものすごい量のエネルギーが発生するにもかかわらず，質量の損失は最初の質量の 0.1％位に過ぎない．

エネルギー T と運動量の間の関係は，形式的には，４元運動量ベクトルの大きさが一定であるということによって表わされる．すなわち，

$$p_\mu p_\mu = -m^2c^2 = p^2 - \frac{T^2}{c^2},$$

あるいは，

$$T^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \qquad (7-100)$$

である．（7－100）式は，非相対論的力学の $T = p^2/2m$ という関係式に対応する相対論的な式である．ただここでは T が静止エネルギーを含んでいるという点だけは違っている．（7－96）式の T の定義から，有限な静止質量をもつ粒子のエネルギーは，速さが光速に近づくときに，無限大になるということは明らかである．いい換えれば，質量をもつ粒子（あるいは宇宙船）の速さを，静止から光速 c まで増加させるためには，無限に多くのエネルギーを必要とするということである．ここで，われわれは，c より小さい任意の有限の速さか

*) もちろん，そのような巨視的な衝突に含まれる質量の変化は，1ジュールのエネルギーが 1.1×10^{-14} g の質量に対応するのであるから，極めて小さい．

ら出発して，光速に達するかあるいはそれを越えることは不可能であるということの別の証明を得たことになる†.

7－7　衝突の相対論的運動学と多体系

前節の定式化によって，今や，いろいろな系の間の，衝突現象の変換に関する第３－11節の議論を，p.310 相対論的に一般化することが可能になった．この問題は，高エネルギー実験物理学において，かなり興味のあるものである．素粒子間の力は不完全にしか知られておらず，また確かに古典的なものとは大いに違っているであろうが，反応に含まれる粒子が相互作用領域の外にある限り，それらの平均の運動は古典力学によって記述することができる．さらに，変換に含まれている主要な原理 — すなわち，運動量の４元ベクトルの保存則 — は古典力学でも量子力学でも成立する．実際の衝突あるいは反応は，１点で — あるいは非常に小さいブラック・ボックスの中で — 起こると考えられ，そしてわれわれは衝突前と衝突後の粒子の振舞だけに注目する．高エネルギー物理学での重要性のために，相対論的運動学のこの面は非常に詳細に発展させられた分野になっている*. ここで，その包括的な議論をすることは不可能であろう．ここでできることは，重要な手段のいくつかを与え，用いられる技巧の味わいを示す2, 3の簡単な例を引き合いに出すことだけである．

質量中心と呼ばれる点の概念は，Lorentz 不変な理論においては明らかに困難を生ずる．しかし，質量中心系は，すべての粒子の全線運動量が零であるようなLorentz 基準系として，適切に一般化することができる．そのよ

---

†）粒子が光速よりも大きい速さを持って**生まれる**ことは，この命題を犯すことにはならないということが指摘されてきた．そのような“タキオン”(tachyon) に対しては，(７－96) 式のエネルギーは，その粒子に結びつけられる“質量”が虚数であるときに限って，実数でありうる．実質的には，このことは，タキオンが，全エネルギーが $T = m'c^2/\sqrt{\beta^2 - 1}$ で与えられるような実のパラメーター m' で記述されをことを意味する． タキオンの性質と，それらの相互作用についての考察は，それらがどのようにして，われわれの普通の因果律の見方に適合させることができるかに関する，盛んな議論をまき起こした．このことにさらに立ち入ることは，そのような粒子の存在に対して，今の所実験的な証拠は全く何もないのだから無意味であろう．

*）“運動学”という言い方はいくらか誤った名称である．それは，実際には運動量やエネルギーのような力学的な量に関係しているからである．しかしこの名前はあまりにもしっかり定着しているので，今では追い出すのはむずかしい．

うな Lorentz 系を常に見出すことができるということは，全運動量4元ベクトルが，質点系に対して時間的であるという定理から導かれる．この結果を示すためには，4元ベクトルの成分が2つの添字を持つような記法を導入するのが便利である．その1つは粒子を指定するもの（普通 r, s, t 等）であり，他のものは通常ギリシャ文字の添字で，成分を示すものである．こうすると，系の全4元運動量は，

$$P_\mu = \sum_r p_{r\mu}, \qquad (7-101)$$

のように書かれる．このベクトルの大きさの2乗は，（7－91），（7－74）および（7－75）式を考慮すると，次の式によって与えられる．

$$\begin{aligned} P_\mu P_\mu &= \sum_{r,s} p_{r\mu} p_{s\mu} \\ &= -\sum_r m_r^2 c^2 + \sum_{r \neq s} p_{r\mu} p_{s\mu} \\ &= -\sum_r m_r^2 c^2 - \sum_{r \neq s} m_r m_s \gamma_r \gamma_s (c^2 - \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_s). \end{aligned}$$

物質粒子の速度は常に c より小さいから，P_μ の大きさの2乗は常に負である．それゆえ，変換されたベクトル P_μ の空間成分がすべて零であるような，Lorentz 座標系が存在する．この座標系は，**運動量中心系**（*center-of-momentum system*），あるいはもっとゆるく，質量中心系と呼ばれ，短縮して“C-O-M 系”として示すことにしよう．

p.311

用いることのできる主要な力学の原理 — 事実，殆どすべての物理的状況で用いることが許される — は，衝突の前後における，全運動量4元ベクトルの保存則である．すでに見たように，これは自動的に，線運動量と（静止質量エネルギーをも含めた）全エネルギーの両方が保存されることを意味する．保存の原理を用いるための主な手段は，運動量中心系からのLorentz 変換，および運動量中心系へのLorentz 変換と，すべてのLorentz 系において同じ値をもつLorentz 不変量（世界スカラー）を作ることである．手続きの多くは，非相対

論的衝突に対して用いられたものとよく似ている．しかし，ある意味では，相対論的運動学の結果の方がもっと容易に得られる．われわれは運動量とエネルギーの別々の保存についてわずらわされる必要はない．そして，実験室系と運動量中心系との間の変換は，単にLorentz変換の特別な場合に過ぎない．

Lorentz不変量を用いる例として，質量 m_r， $r = 3, 4, 5 \ldots$ ．をもつ粒子の他の組を発生させるような，2個の粒子によって起こる反応を考えよう．C-O-M系では，変換された全運動量 P'_μ は，空間成分零と第4成分 iT'/c をもっている．しばしば，C-O-M系を，質量 $M = T'/c^2$ をもつ複合粒子の固有系，すなわち静止系と見なすのが便利である*．P_μ の大きさの2乗はすべてのLorentz系において不変でなければならない（そして反応において保存されなければならない）．それゆえ

$$P_\mu P_\mu = P'_\mu P'_\mu = -\frac{T'^2}{c^2} = -M^2c^2, \qquad (7-102)$$

が得られる．しかし，最初の粒子系に対しては，$P_\mu P_\mu$ は次のようにして計算することができる．

$$P_\mu P_\mu = -(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2p_{1\mu}p_{2\mu}. \qquad (7-103)$$

したがってC-O-M 系におけるエネルギー，あるいは等価な質量Mは，入射粒子の量を用いて，

$$T'^2 \equiv M^2c^4 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2(T_1T_2 - c^2\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2), \qquad (7-104)$$

のように与えられる．さて，普通そうするように，1個の粒子，例えば粒子2が実験室系で静止しているとしよう．そうすると $\mathbf{p}_2 = 0$，かつ $T_2 = m_2c^2$ であるから，C-O-M系でのエネルギーは，

$$T'^2 \equiv M^2c^4 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2m_2c^2T_1 \qquad (7-105)$$

となる．静止質量エネルギーを越える T_1 の量，すなわち運動エネルギーをK_1と書くことにすると，これは，

*) 高エネルギー物理学では $c = 1$ であるような単位を用いるのが普通であるが，本書のような入門的な論述では，c のべきを一貫して残しておく方がより有用であるように思われる．

$$T'^2 \equiv M^2c^4 = (m_1 + m_2)^2c^4 + 2m_2c^2K_1 \qquad (7-105')$$

と書くことができる．C-O-M系で使えるエネルギーは，入射運動エネルギーと
p.312
共に，ゆっくりと増加するだけである．運動エネルギーが静止質量エネルギーに比べて極めて大きい“超相対論的”（ultrarelativistic）な領域においてさえも，T' は K_1 の平方根に比例してしか増加しない．

C-O-M系で利用しうる，比較的に小さい入射エネルギーの効果は，エネルギーのしきい値（threshold energies）を用いて劇的に示すことができる．（弾性散乱以外の）ある反応が可能になる最低のエネルギーは，反応生成物がC-O-M系で静止しているときであることは明らかである．運動エネルギーを少しでも持っていれば，より高い T'，あるいは同じことだがより高い入射エネルギーを必要とする． P''_μ として示される反応後のC-O-M系における全4元運動量は，しきい（threshold）の所で次の式で与えられる．

$$P''_\mu P''_\mu = -c^2\left(\sum_r m_r\right)^2. \qquad (7-106)$$

これは，運動量の保存則によって（7－102）式と同じでなければならない．静止している標的に対しては，しきい値における入射運動エネルギーは，（7－105′）式の結果として，次の式で与えられる．

$$\frac{K_1}{m_1c^2} = \frac{\left(\sum_r m_r\right)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_1m_2}.$$

反応の Q 値* が，

$$Q = \sum_r m_r - (m_1 + m_2), \qquad (7-107)$$

で定義されるならば，エネルギーのしきい値は，

$$\frac{K_1}{m_1c^2} = \frac{Q^2 + 2Q(m_1 + m_2)}{2m_1m_2}, \qquad (7-108)$$

となる．（7－108）式の応用として引き合いに出される通常の例は，反応

*) ここで用いる Q は，（3－112）式で採用された規約と逆の符号をもっている．

$$P + N \rightarrow P + N + P + \overline{P},$$

による歴史的な反陽子の創成である．ここにNは核子（nucleon），すなわち中性子かあるいは陽子である．含まれるすべての粒子の質量は，等価な静止質量エネルギー 938 MeV に殆ど等しく，$Q = 2m$ である．そうすると，（7－108）式はしきいにおける入射粒子の運動エネルギーが，

$$K_1 = 6mc^2 = 5.57\,\mathrm{GeV},$$

でなければならないことを述べている．これはQによって表わされるエネルギーの3倍である！　しかしながら，お互いに大きさが等しく，反対向きの速度をもって入射する2個の核子によって，反応が起こされるならば，実験室系はC-O-M 系と同じである．この場合には，運動エネルギーのすべてが陽子－反陽
p.313
子対の生成のために利用できる．そして，しきいにおける入射粒子のおのおのは，1個の陽子だけの質量に等価な運動エネルギー 938 MeV を持てばよい．衝突ビーム装置を作るのに，非常に多くの努力が払われるのは不思議ではない．

しきい値の計算の他の教訓的な例は，例えば次の反応による光による中間子の創成（photomeson production）に対するものである．

$$\gamma + P \rightarrow \Sigma^0 + K^+ . \qquad (7-109)$$

ここでγは光子を表わす．古典力学の目的のためには，光子は運動量 $^0\mathbf{p}$ とエネルギー ^0pc をもつ質量零の粒子であるということで十分である*．Qを計算するに当って，m_1 の質量は零であるから，

$$Q = (\Sigma^0 + K^+ - P) = 748\,\mathrm{MeV}$$

である．反応が入射光子を含むときには（7－108）式は次のように書き換えられるべきである．

---

*）光子の運動量4元ベクトルの大きさの2乗は零である．そのベクトルは，時には“光的”（light-like）であるといわれることがある．運動量中心系定理（409 ページ）の成立が危ぶまれるのは，すべての粒子が光子であり，なおその上，光子がすべて同じ方向に進んでいるときに限られる．

$$K_1 = {}^0pc = c^2\frac{Q^2 + 2Qm_2}{2m_2}.$$

Qと，陽子の静止質量エネルギー $m_2 c^2$ の値から，(7－109) 式の反応に対するエネルギーのしきい値は，

$$K_1 = 1.05\,\mathrm{GeV},$$

であって，これはQよりもわずかに高いだけである．

われわれはまた，実験室系での，しきいにおける反応生成物のエネルギーを容易に見出すことができる．C-O-M 系は，$P_4' = iMc$ をもつ，質量Mに対する静止系である．任意の他の系では，4元ベクトルの第4成分は $P_4 = iMc\gamma$ である．しかし，実験室では，

$$P_4 = \frac{i}{c}(T_1 + T_2) = \frac{i}{c}(T_1 + m_2c^2),$$

である．ここで最後の形は，静止した標的粒子に対してのみ成立する．それゆえ，C-O-M 系は実験室系に相対的に

$$\gamma = \frac{T_1 + m_2c^2}{Mc^2}, \qquad (7-110)$$

であるように運動している．しかし，しきいにおいては反応生成物は，C-O-M 系において静止していて，$M = \sum_r m_r$ であり，したがって

$$\gamma = \frac{K_1 + (m_1 + m_2)c^2}{\sum_r m_r c^2} \quad (\text{しきい}), \qquad (7-111)$$

p.314
である．このとき実験室系における第s番目の反応生成物の運動エネルギーは，

$$K_s = m_sc^2(\gamma - 1), \qquad (7-112)$$

である．このように，しきいにおける反陽子は，運動エネルギー $K_{\bar{p}} = mc^2 = 938\,\mathrm{MeV}$をもっている．これと対照的に，しきいにおいて出てくるK^+中間子の運動エネルギーは 88.4 MeV である．

第3－11節では，2体非相対論的衝突の運動学的変換を調べた．(3－117′) 式は，静止した標的から弾性散乱された後の入射粒子のエネルギーの減少を，

C-O-M 系における散乱角の関数として与えるものである．これに対応する相対論的な式の導出は，相対論的運動学の方法の，他の興味ある例を与える．ここではLorentz不変量を用いることは，そんなに助けにはならない．そのかわりに，実験室系とC-O-M 系の間に，直接Lorentz 変換を行う．図7−2は，両方の系における，入射および散乱後の4元運動量ベクトルの空間成分の間の関係を示している．入射粒子および散乱された粒子の運動量ベクトルは，その方向がLorentz変換によって変わらない1つの平面を定義する．ここでは，それを xz 平面にとり，入射方向は z 軸に沿っているとする．衝突は弾性的であるから，入射粒子の質量 m_1 と，静止した標的の質量 m_2 は不変に保たれる．すなわち $m_3 = m_1, m_4 = m_2$ である．ベクトルにつけたプライムは C-O-M系での値であることを示し，プライムのないものは実験室系におけるものである．散乱前と後とを区別するために，衝突後のベクトルに対しては，添字3，4を残すことにしよう．読者は，3は散乱された入射粒子を，そして4は反跳を受けた標的粒子であることを覚えておくだけでよい．個々の粒子の4元ベクトルの成分は，常に2つの添字をもつであろう．その第1番目のものは粒子を示し，第2番目のものは成分を示す．

実験室系からC-O-M系へのLorentz 変換は，(7−110)式の γ によって定義され，その中の M は(7−105)式で与えられる．

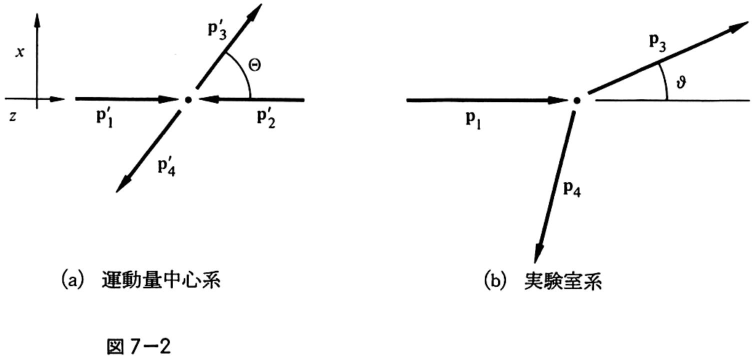


図7−2
C-O-M系および実験室Lorentz 系における相対論的弾性散乱に対する運動量ベクトルの図.

$$\gamma = \frac{T_1 + m_2c^2}{\sqrt{2m_2c^2T_1 + (m_1^2 + m_2^2)c^4}} = \frac{K_1 + (m_1 + m_2)c^2}{\sqrt{2m_2c^2K_1 + (m_1 + m_2)^2c^4}}. \quad (7-113)$$

p.315

量βはγから見出すことができる．あるいはもっと直接的にγを得るために用いられたのに似た議論によって求められる．C-O-M系では，全運動量4元ベクトルの空間部分は零である．任意の他の系では，空間部分は$Mc\boldsymbol{\beta}\gamma$である．しかしながら，実験室系では，空間部分は$\mathbf{p}_1$である．それゆえ，（7－110）式によって$\boldsymbol{\beta}$は次のように与えられなければならない．

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{p}_1 c}{T_1 + m_2c^2} = \frac{\mathbf{p}_1 c}{K_1 + (m_1 + m_2)c^2}. \quad (7-114)$$

$\boldsymbol{\beta}$はz軸方向にあるから，Lorentz変換は（7－18）式の形をとり，C-O-M系における$p'_{1\mu}$の成分は，

$$\begin{aligned} p'_1 &= p'_{13} = \gamma\left(p_1 - \frac{\beta T_1}{c}\right), \\ \frac{iT'_1}{c} &= p'_{14} = i\gamma\left(\frac{T_1}{c} - \beta p_1\right), \end{aligned} \quad (7-115)$$

によって与えられる．衝突後には，$\mathbf{p}'_3$はもはやz方向にはないが，衝突は弾性的であるから，その大きさは$\mathbf{p}'_1$の大きさと同じである．第3－11節におけるように，Θを$\mathbf{p}'_3$と入射方向の間の角とすると，C-O-M系における$p'_{3\mu}$の成分は，

$$p'_{31} = p'_1 \sin\Theta, \qquad p'_{33} = p'_1 \cos\Theta, \qquad p'_{34} = p'_{14} = \frac{iT'_1}{c}, \quad (7-116)$$

である．実験室系へ戻す変換は，同じLorentz変換であるが，相対速度は$-\boldsymbol{\beta}$である．それゆえ，$\mathbf{p}_3$の成分は，

$$\begin{aligned} p_{31} &= p'_{31} = p'_1 \sin\Theta, \\ p_{33} &= \gamma(p'_{33} - i\beta p'_{34}) = \gamma\left(p'_1 \cos\Theta + \frac{\beta T'_1}{c}\right), \\ p_{34} &= \gamma(p'_{34} + i\beta p'_{33}) = i\gamma\left(\frac{T'_1}{c} + \beta p'_1 \cos\Theta\right). \end{aligned} \quad (7-117)$$

である．もし，T_1' と p_1' を，（7－115）式から，（7－117）式の最後の式に代入すると，少し簡単化した後，その入射のときの性質を用いて，散乱された粒子のエネルギーに対する表式が得られる．

$$T_3 = T_1 - \gamma^2\beta(1-\cos\Theta)(p_1c - \beta T_1). \qquad (7-118)$$

（7－118）式において，γ と β は入射量を用いて,（7－113），（7－114）式を利用して表わされる筈である．その結果，次の関係式が得られる．

$$\gamma^2\beta(p_1c - \beta T_1) = \frac{m_2 p_1^2 c^2}{2m_2T_1 + (m_1^2 + m_2^2)c^2}.$$

p_1 と T_1 の間の関係，（7－100）式，を用いることによって，これは次のように書くことができる．

$$\gamma^2\beta(p_1c - \beta T_1) = \frac{m_2K_1(K_1 + 2m_1c^2)}{2m_2K_1 + (m_1 + m_2)^2c^2}. \qquad (7-119)$$

p.316
さらに，いくらか代数的演算を行えば，（7－118）式は，

$$\frac{K_3}{K_1} = 1 - \frac{2\rho(1+\mathscr{E}_1/2)}{(1+\rho)^2 + 2\rho\mathscr{E}_1}(1-\cos\Theta), \qquad (7-120)$$

のように書き変えることができる．ここで，弾性散乱に対する第3－11節と同様に，$\rho = m_1/m_2$ であり，また $\mathscr{E}_1$ は静止質量エネルギーを単位として測った入射粒子の運動エネルギーである．すなわち，

$$\mathscr{E}_1 = \frac{K_1}{m_1c^2}. \qquad (7-121)$$

（7－120）式は，（3－117′）式の相対論的対応である．（7－120）式は $\mathscr{E}_1 \to 0$ のときには非相対論的な場合に帰着し，また $\rho = 1$（等しい質量のとき）ならば，相対論的補正は完全に消し合うことは簡単にわかる．（7－120）式は，m_1c^2 の単位で測った散乱後の最小エネルギーは，

$$(\mathscr{E}_3)_{\min} = \mathscr{E}_1\frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2 + 2\rho\mathscr{E}_1}, \qquad (7-122)$$

で与えられることを意味する．非相対論的な極限では，散乱後の最小のエネルギーの比は，

$$\frac{(\mathscr{E}_3)_{\min}}{\mathscr{E}_1} = \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2; \qquad \mathscr{E}_1 \ll 1, \tag{7－123}$$

であるが，これは（3－117′）式から容易に得られる，よく知られた結果である．（7－123）式は，非相対論的な領域では，質量 m_1 の粒子は，はるかに重い粒子，すなわち $\rho \ll 1$，からの散乱によって多くのエネルギーを失うことはできないことを述べている．これは明らかにわれわれの常識に合致している．しかしながら $\rho\mathscr{E}_1 \gg 1$ である超相対論的な領域では，散乱後の最小エネルギーは $\mathscr{E}_1$ には無関係である．

$$(K_3)_{\min} = \frac{(m_2 - m_1)^2 c^2}{2m_2}; \qquad \rho\mathscr{E}_1 \gg 1. \tag{7－124}$$

$\mathscr{E}_1$ に対するこの条件は，$K_1 \gg m_2 c^2$ を要求することと等価であるから，（7－124）式から，そのような粒子は，非常に重い粒子から散乱されるときでさえ，そのエネルギーの大部分を失うことができる，ということが導かれる．この振舞いは予期されなかったものであるが，光速に極めて近い速さで運動する，このようなエネルギーをもつ粒子に対しては，速度のわずかな変化さえ，エネルギーの大きな変化に対応することを思い出そう．

最後に，

$$\tan\vartheta = \frac{p_{31}}{p_{33}} = \frac{\sin\Theta}{\gamma\left(\cos\Theta + \dfrac{\beta T_1'}{p_1' c}\right)},$$

であることに注意することによって，C-O-M 系と実験室系における散乱角の間の関係を容易に求めることができる．（7－90）と（7－96）式によって，

$$\frac{p_1' c}{T_1'} = \frac{v_1'}{c} \equiv \beta_1',$$

p.317

であるから，$\tan\vartheta$ はまた次のように書くこともできる．

$$\tan\vartheta = \frac{\sin\Theta}{\gamma(\cos\Theta + \beta/\beta_1')}.$$

初期値を用いれば，（7－115）式は，

$$\frac{\beta T_1'}{p_1' c} = \frac{\beta\left(\frac{T_1}{c} - \beta p_1\right)}{p_1 - \frac{\beta T_1}{c}},$$

であることを示している．この式は，次の関係式を使うことによって，さらに簡単化される（（７－114）式参照）．

$$\frac{\beta}{p_1 - \frac{\beta T_1}{c}} = \frac{1}{m_2 c},$$

$$T_1 - \beta p_1 c = \frac{m_1(m_1 + m_2)c^4 + m_2 c^2 K_1}{(m_1 + m_2)c^2 + K_1}.$$

そうすると，$\tan\vartheta$ に対する最終的な表式は，次のように書くことができる．

$$\tan\vartheta = \frac{\sin\Theta}{\gamma(\cos\Theta + \rho g(\rho, \mathscr{E}_1))}. \qquad (7-125)$$

ここに，$g(\rho, \mathscr{E}_1)$ は，関数，

$$g(\rho, \mathscr{E}_1) = \frac{(1 + \mathscr{E}_1) + \rho}{1 + \rho(1 + \mathscr{E}_1)}, \qquad (7-126)$$

であって，γ は（７－113）式によって，次の形をとる．

$$\gamma(\rho, \mathscr{E}_1) = \frac{1 + \rho\,(1 + \mathscr{E}_1)}{\sqrt{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathscr{E}_1}}. \qquad (7-127)$$

再び，非相対論的領域では，γ と g は１に近づき，（７－125）式は（３－107）式になる．補正関数 $g(\rho, \mathscr{E}_1)$ は，実際上大きな値には決して達することなく，$\mathscr{E}_1$ が非常に大きくなるときには，一定の極限値 ρ^{-1} に近づく．変換された角に重要な影響を及ぼすのは，γ である．この γ は，もちろん，$\mathscr{E}_1$ が増加するとき，限りなく増加する．それは，$\Theta = 0$ あるいは π のとき，角度分布の限界には影響を与えないが，それが存在するということは，他の角では，ϑ は常に非相対論的な場合よりも小さいということを意味する．運動量の横成分に影響しないような，C-O-M 系から実験室系への Lorentz 変換は，このように，常に散乱された粒子の角度分布を前方にゆがめるような傾向を持っている．

ここで，衝突とはあまり関連させては取り扱わないが，しかし運動量中心系の概念と密接に関連しているもう一つのトピックに言及しておこう ― それは角運動量 p.318 の相対論的な一般化である．第1章において，非相対論的な角運動量は，力のかわりにトルクで置き換えれば，線運動量に対する方程式と非常によく似た方程式に従うことが証明された．作用・反作用の法則に従う孤立系に対しては，全角運動量が保存されること，そして質量中心系では，全角運動量は基準点のとり方にはよらないことが示された．これらの命題は，それに対応する相対論的な対応物を持っており，時にはいくつかの付加的な制限がついている．

1個の粒子に対して，Minkowski 空間における2階の反対称テンソルを，その成分 $m_{\mu\nu}$ が，

$$m_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu , \tag{7－128}$$

で与えられるものとして定義しよう*．3×3 部分テンソル m_{ij} は，第4－7節で見たように，明らかに粒子の角運動量の空間成分に対応する．$m_{\mu\nu}$ に対する運動方程式は，それの，粒子の固有時に関する導関数をとり，(7－83′)式を用いることによって得られる．

$$\frac{dm_{\mu\nu}}{d\tau} = (u_\mu p_\nu - u_\nu p_\mu) + (x_\mu K_\nu - x_\nu K_\mu).$$

ここで K_ν はMinkowskiの力の成分である．右辺の最初の項は，$p_\lambda = mu_\lambda$ としての4元運動量の定義によって，明らかに零になるが，この表式の残りは，同様に明らかにトルクの相対論的一般化の最もよい候補である．そこで次のように置く．

$$N_{\mu\nu} = x_\mu K_\nu - x_\nu K_\mu . \tag{7－129}$$

このように，$m_{\mu\nu}$ は，運動方程式

$$\frac{dm_{\mu\nu}}{d\tau} = N_{\mu\nu}, \tag{7－130}$$

に従って変化する．(1－11)式はその非相対論的な極限の形である．

---

*) 二重の添字は，$m_{\mu\nu}$ を，それと全く関係のない粒子の質量から明白に区別する．

粒子の集合を含む系に対しては，全角運動量4元ベクトルは（全線運動量4元ベクトルと類似して），次のように定義することができる．

$$M_{\mu\nu} = \sum_s m_{s\mu\nu}. \qquad (7-131)$$

ここで s は第 s 番の粒子を示す．各粒子はそれ自身の固有時を持っているから，$M_{\mu\nu}$ に対する運動方程式をつくることはもっとむずかしい．（同じような理由によって，われわれはそのことを P_μ に対してさえ試みなかった）． しかし，ある状況の下では，$M_{\mu\nu}$ の保存に対してもっともらしい議論をすることはできる．もし系が完全に孤立しており，また粒子がお互いに，あるいは外界（場を含む）と，相互作用しないならば，各粒子に対する $m_{\mu\nu}$ は，（7－130）式によ
p. 319
って保存され，したがって $M_{\mu\nu}$ もまた保存される．たとえ粒子が相互作用したとしても，その相互作用が，1点における2体衝突を通してだけ起こるときには，次の議論からわかるように，$M_{\mu\nu}$ はやはり保存される．2個の粒子が衝突するとき瞬間的に，その2個の粒子は一緒に動いており，同じ固有時をもっている（いい換えれば，それらの世界線は交差し，同じ**出来事**を共有する）．それで，それらの角運動量の和に対して（7－130）式の形の運動方程式を書くことができる．接触のときの撃力が大きさが等しく向きが反対であるならば，── 衝突における線運動量の保存から期待されるように ── そのときには，撃力のトルクの和は消し合ってしまう．それゆえ，そのような衝突を通じて，相対論的角運動量もまた保存される．非相対論的な場合と違って，相互作用は瞬間的な点衝突に限られなければならないことに注意せよ．

相対論的角運動量は，非相対論的な場合と同じように，基準点の平行移動に関する同じ種類の定理に従う．定義（7－128）あるいは（7－131）式において，基準点（実際は基準になる“出来事”）は，Lorentz 系の任意にとれる原点である．ある他の基準の出来事 a_λ に関して，全角運動量は，

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}(a_\lambda) &= \sum_s [(x_{s\mu} - a_\mu)p_{s\nu} - (x_{s\nu} - a_\nu)p_{s\mu}], \\ &= M_{\mu\nu}(0) - (a_\mu P_\nu - a_\nu P_\mu), \end{aligned} \qquad (7-132)$$

である．非相対論的な場合のように，角運動量成分の変化は，全系が，もしそ

れが a_λ にあったとしたときに持つであろう（原点に対する）角運動量に等しい．

第１章においては，１つの特別な基準点が重要な役割を演じた ── それは質量中心である．われわれは，ここで，少なくとも１つの Lorentz系において，これに似たものを見出すことができる．それには，$M_{\mu\nu}$ の非空間的要素，すなわち $M_{4j} = -M_{j4}$ の性質を調べてみればよい． 定義によって，ある特別な Lorentz 系においては，これらの成分は次式によって与えられる．

$$M_{4j} = \sum_s (x_{s4}p_{sj} - x_{sj}p_{s4})$$
$$= ic\sum_s \left(tp_{sj} - \frac{x_{sj}T_s}{c^2}\right).$$

運動量中心系では，全線運動量 P_j は零になり，この系では M_{4j} は，

$$M_{4j} = -ic\sum_s \frac{x_{sj}T_s}{c^2}, \qquad (7-133)$$

の形をもっている．系が，上で述べたようにその全角運動量が保存されるようなものであれば，他の成分と並んで M_{4j} も保存され，それゆえ，

$$\sum_s x_{sj}T_s = 一定,$$

p. 320
となる．全線運動量が保存されるということは，$T = \Sigma T_s$ もまた保存されることを意味する．それゆえ，その系に関連して（**３次元空間の**）点 R_j を次式で定義することができる．

$$R_j = \frac{\sum_s x_{sj}T_s}{\sum_s T_s}. \qquad (7-134)$$

この点は運動量中心系において静止している．第１近似では $T_s = m_s c^2$ である非相対論的な極限では，（７－134）式は通常の定義，（１－21）式に帰着する．このように，意味のある質量中心（時には**エネルギー中心**（*center-of-energy*）と呼ばれることもある）は，特殊相対性理論においては，角運動量テンソルを用いてのみ，また，特別の基準系に対してのみ定義することができる．最後に，

次のことに注意すべきであろう．すなわち，（7－132）式によって，角運動量テンソルの空間部分 M_{ij} は，非相対論的な場合と全く同じように，運動量中心系における基準点のとり方には依存しない．

1点での衝突という特別な場合を除いて，われわれは今まで，Minkowskiの力が与えられたときの相対論的粒子の運動を見出すという問題は，注意深く避けて通ってきた．このもっと一般的な問題に対しては，次節で，ラグランジアン形式という（名目上の）枠組の範囲内で，着手することにする．

7－8　相対論的力学のラグランジアン形式

特殊相対性理論に対するNewtonの運動方程式の適当な一般化ができたので，次にこの得られた相対論的力学のラグランジアン形式を確立することに進むことができる．一般的にいえば，このことを試みるのに2つの方法がある．1つの手順は，明白な共変的な定式化を要求しないで，そのかわりに，ある特別なLorentz系において運動方程式の空間部分，（7－89）式を再現することに注意を集中することである．力 F_i は，共変的なMinkowskiの力に適当に結びつけられても，結びつけられなくてもよい．他の方法は，共変的なHamiltonの原理と，その結果としてのLagrangeの方程式を目標に出発する．この方法では，空間と時間が，4次元配置空間における座標であるとして同じように取り扱われる．第1の方法は時には，特に力が相対論的にはっきりと定式化されていないときには，極めて不確実である．しかしながら，多くの場合，そのようにして得られた運動方程式は，明白に共変的ではないけれども，ある特別なLorentz系においては相対論的に正しい．他方，第2の方法は，明らかに本来の近づき方であるように見えるが，急速に困難におち入ってしまう．この困難は，1個の粒子に対してさえ，それを避けて通るには，熟練した取り扱いが必要である．1個より多くの粒子の系では，それは始めのときから挫折するといっても良いくらいである．いくつかの特別な場合を除いては，相互作用のある多粒子系に対する満足な定式化は，古典相対論的力学の中には存在しない．この問題は，今でも研究の活発な領域である．

p. 321
この節は第1の方法に関係するものであって，ある特別な慣性系の座標を用

いて，相対論的な運動方程式に導くラグランジアンを見出すことを追求する．このような制限内では，適当なラグランジアンを構成することに大きな困難はない．D'Alembert の原理からラグランジアンを導く，第１－４節の方法は，ここではうまく働かないことは事実である．原理それ自身は（任意の与えられたLorentz 系において）成立するけれども，そこでの導出は，相対論的にはもはや成立しない，$p_i = m_i v_i$ という関係に基づいていた．しかしラグランジアン形式へは，Hamilton の原理（第２－１節）による，もう１つの道から到達することもできる．それには，ただ，変分原理，

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0, \tag{7－135}$$

から得られるEuler－Lagrange の方程式が，すでに知られている相対論的な運動方程式（７－89）と一致するような関数 L を見出すことを試みさえすればよい．

速度によらない保存力を受けるただ１つの質点に対する相対論的なラグランジアンは，

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - V, \tag{7－136}$$

とおくのが適当である．ここで V は位置のみに関係するポテンシャルである．そして，v を，考えているLorentz 系における粒子の速さとして $\beta^2 = v^2/c^2$ である．この L が正しいラグランジアンであることを示すには，これから得られるLagrange の運動方程式，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

が（７－89）式と一致することを証明すればよい．ポテンシャルは速度に関係しないから，v_i は（７－136）式の第１項だけに現われる．したがって，

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = p_i, \tag{7－137}$$

である．それゆえ，（７－136）式のラグランジアンから得られる運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i,$$

となり，（７－89）式と一致する．ここで，ラグランジアン L はもはや $T-V$ に等しくはないが，それにもかかわらず L の速度に関する偏導関数は，やはり運動量に等しくなっていることに注意しよう．実際，Lagrange の方程式が正しいことを保証するのは，まさにこの後の方の事実であって，（７－137）式から逆にたどれば，少なくともラグランジアンの速度に対する関数関係を与えることができた筈である．

ラグランジアン（７－136）式は，直ちに，多くの質点から成る系に拡張す
p.322 ることができ，また直交座標から，任意の一般化座標の組 q_j に変換することもできる．そのような場合でも，正準運動量は，やはり

$$\mathfrak{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \tag{7-138}$$

で定義される．したがってサイクリックな座標があれば，それに対応する運動量が保存されるという関係は，非相対論的な理論における場合と全く同じように残る．さらに，第２－６節におけると全く同様に，もし L が時間を陽に含まなければ，

$$h = \dot{q}_j\,\mathfrak{p}_j - L \tag{7-139}$$

で与えられる運動の定数が存在する．しかしながら，hを，例えば（７－136）式の形のラグランジアンに対するエネルギーと同一視することは，第２－６節におけると同様な道に沿って進めることはできない．（７－136）式の L は，決して速度成分の同次関数ではないことに注意しよう．それにもかかわらず，（7－136）式から（7－139）式を直接計算してみれば，この場合には h は実際に全エネルギーであることが示される．すなわち，

$$h = \frac{mv_iv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2\sqrt{1-\beta^2} + V$$

である．この，初めの２つの項を集めると，

$$h = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + V = T + V = E, \qquad (7-140)$$

になり，hは，再び全エネルギーEに等しいことがわかるからである．したがって全エネルギーEは，このような条件（Vが$\mathbf{v}$に無関係で，Lがtを陽に含まない）の下では運動の定数である．

ここで，速度に関係するポテンシャルを導入しても，特別な困難は起こらない．それは，第1－5節で非相対論的な力学に対して行ったのと全く同じようにして導入することができる．すなわち，電磁場の中のただ1つの質点に対するラグランジアンは，

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}, \qquad (7-141)$$

となる．正準運動量は，この場合にはもはやmu_iに等しくはならないことに注意しよう．この時には，ポテンシャルの速度に関係する部分から生じる項が付け加わって，

$$p_i = mu_i + \frac{q}{c}A_i, \qquad (7-142)$$

となる．もちろん，この現象は相対論的なものではない．前の取り扱いでも，全く同じ付加項が見出されていた（(2－47)式参照）．(7－141)式の定式化は明白に共変的ではない．しかし，われわれは，(7－141)式の中の速度に依存するポテンシャルから導くことのできるLorentzの力の相対論的共変性の結果として，上の結果は，すべてのLorentz系において成立するであろうということを，確信をもって期待することができる．

p.323

このようにして，前に力学に特有な問題を解くために工夫された手段を，殆どすべて相対論的力学に移入することができる．ここで，このことを示すために2,3の例題を考察することにしよう．

1.　一定の力の下での運動，双曲線運動　一定の力の方向にx軸をとっても一般性は失われないであろう．それゆえ，ラグランジアンは，

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - max, \qquad (7-143)$$

となる．ここでβは $\dot{x}/c$ であり，aは単位質量当りの一定な力の大きさである．（7－143）式からでも，あるいは（7－89）式に基づいて直接にでも，いずれの方法によっても，運動方程式は容易に見出されて，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\frac{a}{c},$$

となる．第１積分は，

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{at+\alpha}{c},$$

あるいは，

$$\beta=\frac{at+\alpha}{\sqrt{c^2+(at+\alpha)^2}},$$

となる．ここでαは積分定数である．tについては０からt，xについてはx_0からxまで第２の積分を行うと，

$$x-x_0=c\int_0^t\frac{(at'+\alpha)\,dt'}{\sqrt{c^2+(at'+\alpha)^2}},$$

が得られるが，これから，完全な解，

$$x-x_0=\frac{c}{a}\left(\sqrt{c^2+(at+\alpha)^2}-\sqrt{c^2+\alpha^2}\right), \qquad (7-144)$$

が導かれる．もし質点が静止の状態で原点から出発する．すなわち，$x_0=0$ および$v_0=0=\alpha$であるとすれば，（7－144）式は，次のように書くことができる．

$$\left(x+\frac{c^2}{a}\right)^2-c^2t^2=\frac{c^4}{a^2}.$$

これは，x，t 平面における双曲線の方程式である．（同じ条件の下で，非相対論的運動は，もちろんx，t 平面における放物線である．）非相対論的な極限は，（7－144）式から，$(at+\alpha)$ がcに比べて小さいと考えることによって得られる．すなわち，この極限では $\alpha\rightarrow v_0$ であることに注意すれば，t の関数としてのxに対する初等的な物理学の公式が容易に得られる．

p 324
この例で述べた運動は，かなり現実的な状況の下で生ずる．例えば，それは一定かつ一様な電場によって，実験室系で相対論的な速度にまで加速される電子の場合に対応している．次に述べる例は，もっとアカデミックなものであるが，使われる技法の例として興味のあるものである．

2.　相対論的な１次元調和振動子　　この場合のラグランジアンは，(7−136)式の形であって，かつ$V(x)$は，

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2, \tag{7-145}$$

である．Lは時間を陽に含む関数ではなく，またVは速度に依存しないから，全エネルギーEは一定である．次に（7−140）式を速度$\dot{x}$について解くと，

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=1-\frac{m^2c^4}{(E-V)^2}, \tag{7-146}$$

となる．差当って，われわれは$V(x)$の特別な形を代入することは先に延ばし，問題を，（7−145）式の定性的な特徴を共有する，任意のポテンシャルの場合を含むように，少しばかり一般化しよう．このように，$V(x)$は，原点に関して対称であり，そこに極小をもつような任意のポテンシャル関数であるとする．そうすると，Eが$V(0)$とVの極大との間にあるとすれば，運動は，次の式で定められる限界，$x=b$と$x=-b$の間で振動するものになるであろう．

$$V(\pm b)=E-mc^2.$$

振動的な運動の周期は，（7−146）式によって，

$$\tau=\frac{4}{c}\int_0^b\frac{dx}{\sqrt{1-\dfrac{m^2c^4}{(E-V(x))^2}}}, \tag{7-147}$$

から得られることになる．(7−147)式は，$V(x)$に対して特にHookeの法則の場合の形を入れると，楕円積分によって表わすことができる*．われわれは，

---

*) J.L.Synge, *Classical Dynamics*, p.211, in Vol.III/1, *Encyclopedia of Physics*, 1960 を見よ．

その代わりに，ポテンシャル・エネルギーが常に静止質量エネルギー mc^2 に比べて小さいときの，１次の相対論的補正を調べてみることにしよう．記法を変える方が便利である．エネルギー E は，

$$E = mc^2(1 + \mathscr{E}),$$

と書くことができ，したがって，

$$\frac{E - V(x)}{mc^2} = 1 + \mathscr{E} - \kappa x^2 = 1 + \kappa(b^2 - x^2), \qquad (7-148)$$

となる．ここで，

$$\kappa = \frac{k}{2mc^2}, \qquad (7-149)$$

p.325
である． $(\kappa b^2)^2$ の次数までとると，周期の（７－147）式は

$$\tau \simeq \frac{4}{c}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{2\kappa(b^2 - x^2)}}\left(1 + \frac{3\kappa}{4}(b^2 - x^2)\right), \qquad (7-150)$$

となる．（７－150）式の中の積分は，最も簡単には変数を $x = b\sin\phi$ で変換することによって初等的な方法で計算することができる．最終的な結果は，

$$\tau \simeq \frac{2\pi}{c}\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\left[1 + \frac{3}{8}\kappa b^2\right] = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left[1 + \frac{3kb^2}{16mc^2}\right],$$

である．角括弧の前の表式は，非相対論的な調和振動子の周期 τ_0 であることがわかるであろう．このように，特殊相対性理論では，調和振動子の周期は，その振幅に無関係ではない．そのかわりに，近似的に次式で与えられる振幅に依存する補正がはいってくる．

$$-\frac{\Delta\tau}{\tau_0} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \simeq -\frac{3}{16}\frac{kb^2}{mc^2} = -\frac{3}{8}\mathscr{E}. \qquad (7-151)$$

3.　一定の磁場の中の荷電粒子の運動　原理的には，$\phi = 0$ とし，また $\mathbf{A}$ を一定の磁場に適するベクトル・ポテンシャル（（５－106）式）として，（７－141）式の形のラグランジアンから出発すべきである．しかし，われわれは，そのようなラグランジアンは次の式で与えられる荷電粒子に働く Lorentz の力に対応することを知っている（（１－61）式を参照）．

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \qquad (7-152)$$

それゆえ，運動方程式は，

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{q}{mc\gamma}(\mathbf{p} \times \mathbf{B}), \qquad (7-153)$$

でなければならない．（7－152）式の力の性質は，明らかに，磁場が粒子に仕事をしないようなものである．すなわち，$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = 0$ である．それゆえ（7－95′）式によって T は一定でなければならない．また同様に，（7－100）式によって p と γ も一定でなければならない．さらに，（7－152）式によって $\mathbf{B}$ に平行な力の成分はなく，その方向の運動量成分は一定に保たれなければならない．それゆえ，$\mathbf{B}$ に垂直な平面内の運動のみを考え，また $\mathbf{p}$ を全線運動量の，この面上への射影を表わすものとしても，一般性を失うことにはならない．そのとき，（7－153）式は，ベクトル $\mathbf{p}$（その大きさは一定である）が，磁場の方向のまわりに，角速度，

$$\Omega = \frac{qB}{mc\gamma}, \qquad (7-154)$$

で歳差運動をすることを述べている．γ は定数であるから，その平面内の速度ベクトルもまた一定の大きさであって，同じ振動数で回転している．粒子は，
p.326
それゆえ，その面内で円軌道上を角速度 Ω で一様に運動する．したがってその面内の線運動量の大きさは，

$$p = m\gamma r\Omega,$$

によって与えられなければならないことが導かれる．この式と（7－154）式を結びつけると，円の半径と運動量の間の関係式，

$$r = \frac{p}{qB/c}, \qquad (7-155)$$

が導かれる．粒子の運動が曲げられる曲率半径は，粒子の性質には $pc/q\ (=Br)$ を通してのみ依存し，この量は粒子の**磁気剛性率**（*magnetic rigidity*）と呼ばれる．Ω（（7－154）式）は，γ の存在を通じて相対論的補正を示している

が，rとp.との間の関係は，相対論的にも非相対論的にも同じであることに注意しよう．(7－154)および(7－155)式のいずれにおいても，$\mathbf{p}$は$\mathbf{B}$に垂直な運動量の大きさであるが，γを計算する場合には，βを見出すために，$\mathbf{B}$に垂直な成分と平行な成分の両方を用いなければならないことは覚えておくべきである*.

7－9 共変ラグランジアン形式

上に述べたような，ラグランジアンを用いる方法は，確かに正しい相対論的な運動方程式を与える．しかしながら，この形式は単に“ある意味で”のみ相対論的な定式化であるといえるに過ぎない．力学のすべての法則に対して，共変4次元形式を与えるという理想を固く守ろうとする努力は何もなされていない．すなわち，共変形式では，空間と時間は，世界空間における全く同等な座標と考えなければならないにもかかわらず，前節では時間tは空間座標とははっきりと区別された1つのパラメーターとして取り扱われている．明らかに，配置空間における系の配置点の動きを追跡するときには，tのかわりにある不変なパラメーターを用いるべきである．さらに，前節で論じたラグランジアン関数の例は，Lorentz 変換に対して特定の変換性をもっていない．Hamilton の原理は，それ自身明らかに共変的でなければならない．このことは，この場合には，作用積分が，一つの世界スカラーでなければならないことを意味する．もし，積分のパラメーターがLorentz不変であるならば，ラグランジアン関数それ自身は，任意の共変的な定式化において世界スカラーでなけれがならないことになる．最後に，ラグランジアンは，x_iと$\dot{x}_i$の関数である代わりに，Minkowski 空間の座標と，不変なパラメーターに関するそれらの導関数の関数でなければならない．

---

*) 歳差運動の振動数(gyration frequency)(7－154)式は，(5－104)式で与えられるLarmor振動数と混同してはならない．実際，第5－9節のLarmorの定理は，ここでは適用できない．それは，平面内での運動の運動エネルギーは，(5－110)式の中のω_l^2の項と大きさが同程度であり，また両方共にBに関して1次の項と比較し得る位の大きさだからである．Larmorの定理に対する条件は，それゆえ，ここでは満たされないのである．

p.327

われわれは，主としてただ1個の粒子から成る系のみを考える．そのような系における不変なパラメーターの自然な選び方は，粒子の固有時 τ であるように思われるであろう．しかし，その時には一般化速度 u_ν のいろいろな成分は，関係式，

$$-u_\nu u_\nu = c^2, \qquad (7－75)$$

に従わなければないが，これはそれらが独立でないことを示している．そこでその代わりに，世界点が，その粒子の世界線に沿って進んで行く道筋の単調関数であるという以外には，特に指定はしないLorentz不変なある量 θ を選ぶことにしよう．この議論の目的のために，プライムを θ に関する微分を示すために用いることにする．すなわち，

$$x'_\nu \equiv \frac{dx_\nu}{d\theta},$$

と書く．一方，文字上の点は，t に関する微分を示す．それゆえ，1つの共変的なHamiltonの原理として適当な形は，

$$\delta I = \delta\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Lambda(x_\mu, x'_\mu)\,d\theta = 0, \qquad (7－156)$$

と書けるにちがいない．ここにラグランジアン関数 Λ は世界スカラーでなければならない．この定式化は，Λ が x_4 の関数と考えられるので，通常 “時間を含む（time-dependent）ラグランジアン” による定式化といわれるものを含んでいる．（7－156）式に対応するEuler－Lagrange の方程式は，

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\mu}\right) - \frac{\partial\Lambda}{\partial x_\mu} = 0, \qquad (7－157)$$

である．問題は，（7－157）式が運動方程式（7－83）と等価になるような Λ の形を見出すことである．

Λ を探し出す1つの方法は，作用積分を，普通の t に関する積分から θ についての積分に変換し，ラグランジアンの中に陽に現われる t を，パラメーターとしてではなく，付加的な一般化座標として取り扱うことである．θ は，あるLorentz 系で測られたとき，t の単調関数でなければならないから，

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dx_i}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=ic\frac{x_i'}{x_4'}, \qquad (7-158)$$

が得られる．したがって，作用積分は次のように変換される．

$$I=\int_{t_1}^{t_2}L(x_j,t,\dot{x}_j)\,dt=-\frac{i}{c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}L\left(x_\mu,ic\frac{x_j'}{x_4'}\right)x_4'\,d\theta.$$

それゆえ，適当なΛを得る１つの手法は，

$$\Lambda(x_\mu,x_\mu')=-\frac{ix_4'}{c}L\left(x_\mu,ic\frac{x_j'}{x_4'}\right), \qquad (7-159)$$

によって与えられるように見えるであろう．

p.328
しかしながら，このような方法で得られたラグランジアンは，われわれが今まで出会ったものとはちがって，奇妙な産物である．Lの関数形がどのようなものであってもΛは一般化速度の１次同次関数である．すなわち，

$$\Lambda(x_\mu,ax_\mu')=a\Lambda(x_\mu,x_\mu'). \qquad (7-160)$$

このことは，相対論的物理学に特有のことではない．それは，配置空間を，tを力学変数として含むように拡張し，そしてその空間の中を動く配置点に印をつけるために，他のパラメーターを用いたことの数学的結果である．(７－160)式に従うラグランジアンは，しばしば，（いくらか誤解させるような言い方であるが）同次ラグランジアンと呼ばれ，それに対応する変分法の“同次”問題は，特別な取り扱いを必要とする*．結果として生じる困難のうち最も深刻なものは，ハミルトニアン形式において生じるのであるが，われわれは，その結果として，エネルギー関数hが（２－56）式から恒等的に零になる，ということに注意することによって，それらの困難のいくつかを，垣間見ることができる．同次関数についてのEulerの定理から，もしΛがx_μ'について同次１次であるならば，

$$\Lambda=x_\mu'\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\mu'},$$

*）詳しい論述については，H.Rund, *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*(New York : Van Nostrand, 1966)，Chapter 3 を見よ．

であることが導かれる．その結果として，関数Λが次の式を恒等的に満足するということが導かれる（章末の演習問題 29 を参照せよ）．

$$\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\mu}\right)-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\mu}\right)x'_\mu=0. \qquad (7-161)$$

このように，もし Lagrange の方程式（7−157）のうち，任意の 3 つが満足されるならば，Λの同次性の結果だけから，第 4 番目のものは恒等的に満足されるということが導かれる．

このようにいわば，注意深く歩むように前もって警告されていることを承知の上で，われわれは 1 個の自由粒子に対するこの変換を行なうことにしよう．（7−136）式から，その自由粒子に対する“非共変的な”ラグランジアンは，

$$L=-mc\sqrt{c^2-\dot{x}_i\dot{x}_i},$$

である．（7−159）式の変換によって，可能な共変ラグランジアは次のようになる†．

$$\Lambda=-mc\sqrt{-x'_\mu x'_\mu}. \qquad (1-162)$$

p.329
このラグランジアンを用いると，Euler-Lagrange の方程式は，

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{mcx'_\nu}{\sqrt{-x'_\mu x'_\mu}}\right)=0,$$

と等価になる．パラメーター θ は固有時 τ の単調関数でなければならないから，θ に関する導関数は τ に関する導関数と，

$$x'_\nu\equiv\frac{dx_\nu}{d\theta}=\frac{d\tau}{d\theta}u_\nu,$$

によって関係づけられる．それゆえ，Lagrange の方程式は，

†）（7−162）式に導く代数的演算において，符号の曖昧さがある．これは，$L\,dt$ が $\Lambda\,d\theta$ と同じ値をもつように定められなければならない．導出の最後の段階は，次のように書ける筈である．

$$\Lambda=imc\sqrt{x_4'^2+x'_jx'_j}=-mc\sqrt{(-i)^2}\sqrt{x_4'^2+x'_jx'_j}=-mc\sqrt{-x'_\mu x'_\mu}.$$

また，特別な計量，（7−35）式を選ぶことは，平方根の中の負号を消すけれども，他の所で記法が複雑になることに注意せよ．

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{mcu_\nu}{\sqrt{-u_\nu u_\nu}}\right)=\frac{d(mu_\nu)}{d\tau}=0,$$

に対応する．これは自由粒子に対する方程式（7－83）である．上で述べたように，これらの式の第4番目のものは，運動エネルギーTが保存されることを述べているが（(7－95)式参照），．これは，事実新しいものではなく，他の3つの方程式から導くことができるものである．

このようにしてわれわれは，少なくとも単一の自由粒子に対しては使える，共変ラグランジアンの手順に導かれたが，それはまわりくどい方法によって，やっと到達された．しかしながら，手のこんだ手順は，いくつかの大胆でかつ実際的な段階を踏むことによって非常に簡単化される．まず第1に，われわれは，Dirac によっていくらか異なった文脈において導入された手続きによって，θを用いることを避けて，直接固有時τを用いて議論を進めることができる．τを用いたときの一般化速度に対する拘束，すなわち（7－75）式は運動に対する真の力学的拘束ではない．むしろそれは，τが定義された方法の幾何学的な結果である．（7－75）式は，実質的には，われわれが4次元 u_ν 空間の全体を動き回ることはできないことを述べている．われわれはその空間の中の，特別な3次元曲面に閉じこめられる．Dirac は，（7－75）式のような関係式を弱い方程式（*weak equations*）と呼んだ．われわれは無事に，u_νを拘束されていない量として取り扱うことができ，そしてすべての微分演算が行われた後に，はじめて（7－75）式の条件を課することが必要になるのである．確かに，このような手順は，上の自由粒子のラグランジアンに対してはうまく働いた．もし初めからθをτに等しいとおいておき，最後の段階で初めて（7－75）式の条件が適用されても，何も違いはないであろう．したがって，共変 Lagrange 方程式は，この条件をつけて，直接τによって次のように書くことができる．

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial u_\nu}\right)-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\nu}=0. \qquad (7-163)$$

第2に，Hamilton の原理における作用積分が，それがtで表わされようとあるいはθ（あるいはτ）で表わされようと，同じ値を持たなければないということは，神聖侵すべからざる物理法則であるというわけではない．それは(7－

159）式のような処方によって与えられる**必要はない**のである．要求されていることは，Λ が，正しい運動方程式に導く，１つの世界スカラー（あるいは世界スカラーの関数）であるべきだ，ということだけである．それは，一般化速度に
p.330
ついて１次同次である**必要はない**．例えば，自由粒子に対する１つの適当な Λ は，明らかに次のような２次の表式でもよい．

$$\Lambda = \frac{1}{2} m u_\nu u_\nu . \qquad (7-164)$$

他の多くの可能性を利用することができる*．われわれは以下のすべての議論において，（７－162）式を，ラグランジアンの“運動エネルギー”部分として用いるであろう．そのことによって現在および将来の頭痛の種が避けられるであろう．

もし粒子が自由でなくて，外力を受けているならば，対応するMinkowskiの力に導くような相互作用の項が，（７－164）式のラグランジアンに付け加えられなければならない．この時点では，付加的な項については，それらがLorentz不変でなければならない，ということ以外は殆ど何もいえない．例えば，もし G_μ がある（外部的な）４元ベクトルであるならば，$G_\mu x_\mu$ は適当な相互作用項であるだろう．もし，あるLorentz系において，$G_1 = ma$ であって，すべての他の成分が零になるならば，われわれは，前節で論じたような一定の力の例を得ることになる．一般に，これらの項は，粒子とある外場との相互作用を表わすであろう．その特別な形は，場の理論の共変的な定式化に依存することになる．われわれは，共変的な方法で表わされた場としては１つの例 ― 電磁場 ― をもっているだけである．それゆえ，電磁場の中の１個の粒子に対

＊）一般に Λ は，$f(y)$ を，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=-c^2} = \frac{1}{2}$$

であるような任意の関数として，$mf(u_\nu u_\nu)$ の形をもつことができる．（７－164）式ではわれわれは $f(u_\nu u_\nu) = \frac{1}{2} u_\nu u_\nu$ を用いたのである．

$$f(u_\nu u_\nu) = -c\sqrt{-u_\nu u_\nu}$$

と選ぶことは，（７－162）式に対応する．

するラグランジアンを調べてみることは，教育的に有益なことである．

適当なラグランジアンは，

$$\Lambda(x_\mu, u_\mu) = \frac{1}{2}mu_\mu u_\mu + \frac{q}{c}u_\mu A_\mu(x_\lambda), \qquad (7-165)$$

であることは容易にわかる．そうすると，対応する Lagrange の方程式は，

$$\frac{d}{d\tau}(mu_\nu) = -\frac{q}{c}\frac{dA_\nu}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{q}{c}u_\mu A_\mu\right),$$

であって，これは，荷電粒子に Minkowski の力，K_ν すなわち（7－88）式が働くときの一般化された運動方程式（7－83）と正確に同じである．ここでp.331再び，“力学的運動量”4元ベクトル p_μ と，**正準運動量** $\mathfrak{p}_\mu$ とは，電磁ポテンシャルに関して1次の項だけ違っていることに注意せよ．すなわち，

$$\mathfrak{p}_\mu = \frac{\partial\Lambda}{\partial u_\mu} = mu_\mu + \frac{q}{c}A_\mu = p_\mu + \frac{q}{c}A_\mu \ . \qquad (7-166)$$

ここでは，x_4 に共役な正準運動量は，

$$\mathfrak{p}_4 = \frac{iT}{c} + \frac{iq\phi}{c} = \frac{i}{c}E,$$

である．ここで，E は粒子の全エネルギー，$T + q\phi$ である．このように，**時間座標に共役な運動量は全エネルギー**に比例する．これら2つの量の間の同じような共役関係には，後に非相対論的理論において出会うであろう．“力学的”運動量の大きさと，エネルギーとの間の関係は，やはり（7－100）式で与えられる．（7－166）式から，x_i に共役な正準運動量は，空間において直交座標を用いたとき $\mathbf{p}$ と次の関係にあるベクトル $\mathfrak{p}$ を形作ることがわかる．

$$\mathfrak{p} = \mathbf{p} + \frac{q}{c}\mathbf{A}. \qquad (7-167)$$

$\mathfrak{p}$を用いれば，（7－100）式は，

$$T^2 = \left(\mathfrak{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + m^2c^4,$$

と書くことができる．これは，エネルギー T と正準運動量 $\mathfrak{p}$ の間の，有用な関係式である．

（7−165）式のラグランジアンの中の相互作用の項は，（$G_\mu x_\mu$ の形の項もそうであるように），ベクトル場相互作用の1例である．われわれはまた，ラグランジアンに付け加えられる項が，ある世界スカラー $\psi(x_\mu)$ であるような簡単なスカラー場相互作用をも持つことができた筈である．あるいは，もっと複雑な，外部テンソル場を含む，不変な相互作用項をも作り出すことができる．そのようなラグランジアンの性質は，含まれる場の理論の物理的性質からでてくるものであって，われわれは，ここではこれ以上その問題に関わっていることはできない．

今までわれわれは，1個の質量をもつ粒子から成る系について語ってきた．多粒子系は新たな複雑さを導入する．1つの明らかな問題は，その系の発展を記述するための1つの不変なパラメーターを見出すことである — この系の各粒子はそれ自身の固有時をもっている．しかしながら，ちょっと考えてみると，この困難を解決する方法を想像することができる．例えば，系の運動量中心系に結びつけられた固有時は，すべての粒子の対称的な取り扱いを含んでおり，これが適当なものであることがわかるかも知れない．また，その描像の中に，外場と粒子との相互作用を，1個の粒子に対してなされたのと，非常によく似た方法で含ませることができるかも知れない．しかしながら，非相対論的力学においては，大変自然で普通な型の相互作用の取り扱いが，大きなつまずきの石である ——— 粒子間の直接の相互作用がそれである．

ちょっと見たところでは，事実そのような相互作用は，相対論的力学では不可能であるかのように思われる．1個の粒子に作用する力が，同じ時刻における他の粒子の位置あるいは速度に依存するということは，効果が1個の粒子から他の粒子へ無限の速さで伝わることを意味する ——— すなわち“遠隔作用”（action-at-a-distance）．特殊相対性理論では，信号が光速度より速く伝わる
p.332
ことができないので，遠隔作用は禁止されるように見える．そしてある意味では，このことは正しい描像であるように思われる．もしわれわれが，系のある性質が正常に振舞う（全線運動量の保存則のように）ことを要求するならば，接触力を通して以外は，粒子間の共変的な直接の相互作用はあり得ないということは，1963年にはじめて形式的に証明された．

最近数年間にわたってこの“無相互作用”(no-interaction)定理を回避しようとする多くの試みがなされた．結局，電磁力は共変的に表わすことができ，そして静電場は，仮定上禁止されているNewtonの重力的な引力と同じ形の，引力のCoulombの法則を引き起こすことがわかった．これらの試みのいくつかは，v^2/c^2 の程度までは正しい，近似的な共変ラグランジアンに導いた*．他のものは，われわれの正常な構造とは異なる力学の定式化を含んでいる．大部分のものは，例えば，簡単なHamiltonの原理を用いて述べることができない．この分野では，今でも活発な研究が進められており，どのような描像が最終的に出てくるかをいうのは，時期尚早である．また，これらの展開が，素粒子物理学のような，物理学の他の分野に対して，もしあるとしても，どんな結果を生じさせるのかは明らかではない．1973年頃のその分野の状態は下に与える参考書のいくつかの中に述べられている．

参　考　書

A. P. FRENCH, *Special Relativity*.　相対性理論についての文献は，特に最近の2,30年の間は，世界の成長産業の1つであった．価値のある参考書のかなりの部分を挙げることでさえも，紙面が限られているという制約を受けないわけにはいかないことになる．それで，ここではきわめて個人的な選択を与えることができるだけである．Frenchの書物は，最もよい入門的な教科書の1つとして正当に称賛されてきた．この書物で使われる数学は，新入生あるいは2年生向きの物理学の程度である．この書物では，相対性理論に導き，その正しさを証明した，実験的な現象に非常な力点がおかれている．2つの章が力学に，主として保存則と相対論的な力に関係している．

ALBERT EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*.　これは通俗的に書かれた書物ではない．特殊相対性理論を取り扱っているのは，この薄い本の3分の1程度に過ぎないが，その中には非常に多くの事柄が含まれている．電気力学についてかなりの素養が予想されている．

R. D. SARD, *Relativistic Mechanics : Special Relativity and Classical Particle Dynamics*.　これは中級の力学の課程のレベルでの相対論的力学である．ラグラン

*) 多くの v^2/c^2 まで共変的なラグランジアンは，“無相互作用”定理よりも何年も先行している．例えば，1920年に発表された，2個の運動する荷電粒子の間の相互作用に対するBreit-Darwinのラグランジアンがある．

ジアンを使う力学は論じられていない．その他の点では，この書物には驚ろくべき量の題材が盛られている．Lorentz 変換を導くさいには，必要な予備知識を最小にするように，特別に留意されている．粒子の運動学には，かなりの力点がおかれている．Minkowski 空間は，殆どこの書物全体を通じて用いられている．

K. R. SYMON, *Mechanics*. 最後の２章は，中級レベルの教科書としては，相対性理論を非常に詳細に取り扱っている．４次元空間は，トレースが＋２の計量とともに早くから導入されており，また非 Euclid 空間における演算への親切な入門を与えている．

p.333
J. L. SYNGE AND A. SCHILD, *Tensor Calculus*. この書物の第２章は，Riemann 空間におけるテンソルの演算に対する最もよい簡潔な参考書の１つである．この著者の一人の手になる，特殊および一般相対性理論の両方についての書物は非常に大部なので，偶然この書物を手にとった読者の勇気をくじくかもしれないが，しかしそのことによってこの書から目をそらすべきではない．

J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*. この有名な書物の初版は，Michelson－Morley の実験から，粒子加速器の中での相対論的運動まで，特殊相対性理論のほとんどすべてのトピックを含み，また，反応の運動学を非常に広汎に扱った節を含んでいる．この版では $x_4 = ict$ の複素 Minkowski 空間が用いられている．第２版では，トレースが−2の空間に変更され，初期の実験の大部分と運動学に関する節はすべて落とされてしまった．ラグランジアンによる定式化は，近似的に相対論的なだけではあるが，１粒子系から多粒子系へと拡張され，また場に対するラグランジアンに迄拡張されている．これらの議論は本書の第12章で取り扱われる．これら２つの版で，特殊相対性理論に対して望まれる殆どすべての事柄を学ぶことができる．今の目的のためには，実際には初版の方がより有用である．

H. M. SCHWARTZ, *Introduction to Special Relativity*. この書物は，特殊相対性理論についての本格的な学術書であって，特にわれわれがここでとった記述の仕方にほぼ沿ったものである．注目すべきことは，Lorentz 変換の群としての性質，および Thomas の歳差運動の取り扱いである．最初は，議論は Minkowski 空間に基づいて行われる．曲っていない平坦な空間におけるテンソルは非常に詳しく取り扱われるが，最終的に，どちらのトレースあるいは符号が用いられるべきかの解決は明らかにされていない．

V. FOCK, *Theory of Space, Time and Gravitation*. 著名なロシヤ人によるこの書物の大部分は，われわれが一般相対性理論と呼ぶ事柄に捧げられている．しかしながら，最初の 100 ページは，特殊相対性理論について述べられており，“逆説的な”実験の詳細な分析や，Lorentz 変換の，回転と純粋 Lorentz 変換への分解のような，

多くの他の書物には見られない特徴をもっている．テンソルが用いられる所では，その空間は大部分トレースすなわち符号は－2 をもつものが用いられている．

C. W. Misner; K. S. Thorne; and J. A. Wheeler, *Gravitation*. この重い (massive) 書物は，(1279 ページもある (この語呂合わせには抵抗できない)) 迷路を通る読者の手助けをしてくれることに大いに尽力したいという点で，称賛に値するものである．教育的な手段としては，印のつけられたいくつかの進路，いろいろな種類のかこみ，欄外のコメント，うまく描かれた図などが用いられている．トランペットを吹く天使は，この書物の最後を飾るもので，中でも1組のフランスの歌と，一人の献身的な“相対論者” (relativist) の骨相学的な図で祝福されている．平坦な時空の物理学 (すなわち特殊相対性理論) はわずか 193 ページであるが，この題材のどの1つについても新鮮な見解が述べられている．51 ページには，*ict* の死が宣言されている．その代わりに符号＋2 の計量が用いられている．

A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*.

Lorentz 共変な場の理論を取り扱う準備として，Barut は 1 個の粒子の共変的な力学への簡単な入門的記述を与えている．注目すべきトピックとしては，Lorentz 変換の群論的性質，Lorentz 変換の中に潜んでいる回転行列，およびいろいろな共変ラグランジアンなどが含まれている．使われる計量は，トレース －2 を持っている．

R. Hagedorn, *Relativistic Kinematics*. 当然のことながら，この書物は，われわれの運動学の議論よりも一層多くの基礎的な事柄にわたっているが，本書で取り扱ったすべてのトピックを実際に含んでいる．大部分で，Lorentz 変換の式は，不変量と共に直接的に用いられており，テンソル記号についての短かい章もある．そこでは符号が －2 と ＋2 の両方に対する公式が与えられている．素粒子物理学で通常行われる
p.334 ように，v のかわりに全体を通じて β が用いられ (それは v と書かれているが)，また質量は陽子の質量に相対的なものをとっている．印刷はタイプで打った原稿から直接にとられたものであって，感じはよくない．

H. Rund, *Hamilton—Jacobi Theory in the Calculus of Variations*. この参考書は，同次問題に公然と迫り，それについて詳しく考察する (第3章) 数少ない書物の1つである．提出されている特解はここでは採用されていないが，しかし，数学的な面の議論は有用な方向づけを与えてくれる．相対性理論について語るときには，Minkowski 空間が用いられている．

R. A. Mann, *The Classical Dynamics of Particles : Galilean and Lorentz Relativity*. 特殊相対性理論は，この比較的簡単な書物の1部を占めているにすぎない．この書物は，主として力学に関する教科書であって，その取り扱いは，期待されるよ

りもスケッチ風のものである．これはタキオンについて述べている数少ない本の１冊であって，また“無相互作用”の定理の証明をも含んでいる． 特殊相性理論は符号 −2 の空間で記述されている．著者は群論に夢中になっている．

E. H. KERNER, ed. *Theory of Action-at-a-Distance in Relativistic Particle Dynamics.* 主として（書物の名前になっている）この問題についての，基礎的な論文を集めたものであって，1972年頃の事柄の状況について概観した編集者の紹介的な短かいエッセーがつけられている．そのとき以来この分野は発展し，そして発展し続けている．読者は雑誌にのる文献に遅れないようにしなければならない．

演 習 問 題

1. 粒子の対の間のスカラー距離にのみ依存する項から成る保存的ポテンシャルをもった，n 個の粒子の力学系を考える．この系のラグランジアンは，Galilei変換によって導かれる座標で表わされた時，その形が最初の座標で表わされたラグランジアンと，位置ベクトルの関数の時間に関する全導関数だけしか違わないことを陽に示せ．これは１つの点変換の下における不変性の特別な場合である（第１章の演習問題 15を参照せよ）．

2. （7−18）式に相似変換を適用して，速度が z 軸と反時計まわりに無限小の角 $d\theta$ をなしているような系へのLorentz変換を求めよ．その結果得られる行列は，直交行列であり，またその逆行列は，v のかわりに $-v$ を代入することによって得られることを，直接的に示せ．

3. $\mathbf{K}(\boldsymbol{\beta})$ を次のダイアデイックとする．

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}(\gamma - 1)}{\beta^2}.$$

そのとき，純粋Lorentz変換の空間部分のダイアディック形は

$$\mathbf{r}' = \mathbf{K}(\boldsymbol{\beta})\cdot(\mathbf{r} - \boldsymbol{\beta}ct),$$

であることを示せ．

4. 静止系における長さが l_0 であるロケットが，ある慣性系の z 軸に沿って一定の速さで動いている．この系の原点にいる観測者は，任意の時刻におけるその長さを，ロケットの頭部と尾部に対してその z 座標を読むことによって観測する．この見かけの長さは，ロケットが，観測者から見て左の極限の位置から右の極限の位置まで動くときに，どのように変わるか．

5, 特殊相対性理論では，系 A から観測した系 B の速度は，系 B で観測した系 A の速

度の符号を変えたものであるということは必ずしも明らかではない．**L** の直交性から，
p.335
２つのベクトルは同じ大きさを持ち，事実互いに他の符号を変えたものに等しいことを証明せよ．証明のためには必要ではないが，簡単のために，純粋Lorentz変換と仮定してもよい．

6. Einstein の速度の加法法則は，また，第２の速度が１つの４元速度の空間成分に直接関係づけられており，したがって，これは，Lorentz 変換によって元の系に戻すことができる，ということを思い出せば導くことができる．この手順によって，もし第２の系が第１の系に対して，その z 軸の方向に速さ v' で運動しており，第３の系は第２の系に対して勝手な方向に速度 $\mathbf{v}''$で動いておれば，第３の系と第１の系の相対速度 $\mathbf{v}$ の大きさは，

$$\sqrt{1-\beta^2}=\frac{\sqrt{1-\beta'^2}\sqrt{1-\beta''^2}}{1+\beta'\beta''_2}$$

で与えられ，また $\mathbf{v}$ の成分は，

$$\beta_x=\frac{\beta''_x\sqrt{1-\beta'^2}}{1+\beta'\beta''_z},\qquad \beta_y=\frac{\beta''_y\sqrt{1-\beta'^2}}{1+\beta'\beta''_z},\qquad \beta_z=\frac{\beta'+\beta''_z}{1+\beta'\beta''_z},$$

で与えられることを示せ．ここで，$\beta''_x=v''_x/c$ 等々である．β_z に対する式は，$\mathbf{v}''$ が z 軸に沿うとき（記号を変えて），正しく（７－22）式になることに注意せよ．

7. 前問の，第１の系と第３の系の間の速度の大きさは，一般に次の式で与えることができることを示せ．

$$\beta^2=\frac{(\boldsymbol{\beta}'+\boldsymbol{\beta}'')^2-(\boldsymbol{\beta}'\times\boldsymbol{\beta}'')^2}{(1+\boldsymbol{\beta}'\cdot\boldsymbol{\beta}'')^2}.$$

8. 一様な速度で動いている粒子のビームが，ある特別な系で静止している標的粒子の集合に衝突する．σ_0を，この系で観測された衝突断面積とする．他の系では，入射粒子は規格化された速度 $\boldsymbol{\beta}_1$ をもち，標的粒子は規格化された速度 $\boldsymbol{\beta}_2$ をもつ．この系で観測される断面積を σ とすれば，次の式が成立することを示せ．

$$\sigma=\sigma_0\sqrt{1-\frac{(\boldsymbol{\beta}_1\times\boldsymbol{\beta}_2)^2}{(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)^2}}.$$

衝突の割合は，Lorentz変換の下で不変でなければならないことを思い出せ．

9. 変換の集合は，もしそれが次の４つの特徴を持っているならば，群の性質をもつといわれる．

1) ２つの相続く変換（変換の“積”）に等価な変換はその集合の中の１つの要素である．

2) 積の演算は結合法則に従う．

3) 恒等変換はその集合の要素である.

4) その集合の中の各変換の逆変換は，またその集合の要素である.

全てのLorentz変換の集合および制限Lorentz変換の集合は（別々に）群の性質を持つが，他の種類のLorentz 変換は群の性質を持たないことを証明せよ.

p.336

10.（7－31）式で定義された行列 **R** について，陽にその要素 R_{4i}, R_{i4} および R_{44} を作り，要素 $R_{ij'}$ の3×3行列の性質を調べることによって，それが空間回転の形を持つことを示せ.（7－28）式を満足するような2つの行列が存在することはできない，すなわち **R** は一意的であることを証明せよ．最後に，**L** は同じように，一意的に次の形の回転と純粋Lorentz変換の積に因数分解できることを示せ.

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}'\mathbf{R}'.$$

11. 地球の“接近した”衛星（半長軸が近似的に地球の半径に等しい）に対して，数値的にThomasの歳差運動の速さを計算せよ．その結果を，地球が扁平な形をもつために，軌道に誘起される歳差運動の速さと比較せよ．衛星の軌道面は赤道面に対して30°傾いていると仮定する.

12. Lorentz変換のベクトル形，（7－61）と（7－62）式の直接の掛算によって，次式が成立することを示せ.

$$r'^2 - c^2t'^2 = r^2 - c^2t^2.$$

13. 二つの適当な**Q**行列，（7－63）式を掛けることによって，2つの純粋Lorentz変換の積に対応する変換を調べよ．その積の表わす空間回転は $\boldsymbol{\kappa}_1 \times \boldsymbol{\kappa}_2$ で与えられる方向で，回転角は次の式に現われる角 θ であることを示せ.

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cosh\psi_1 + \cosh\psi_2 + \cosh\psi_3}{4\cosh\dfrac{\psi_1}{2}\cosh\dfrac{\psi_2}{2}\cosh\dfrac{\psi_3}{2}} \quad .$$

ここで ψ_3 は次の形で，2つの相続く回転の有効相対速度を与える.

$$\cosh\psi_3 = \cosh\psi_1\cosh\psi_2 + \boldsymbol{\kappa}_1\cdot\boldsymbol{\kappa}_2\sinh\psi_1\sinh\psi_2.$$

14. 各平面波には，振動数と波数を含む1つの共変4元ベクトルが結びつけられていることを示せ．4元ベクトルの成分の変換の結果得られる式から，Doppler効果の式を導け.

15. 世界加速度の変換性から，加速度 **a** の成分が，粒子に対して瞬間的に静止している系における，変換された加速度 **a**′の成分を用いて次の式で表わされることを示せ.

$$a'_x = \frac{a_x}{1-\beta^2}, \qquad a'_y = \frac{a_y}{1-\beta^2}, \qquad a'_z = \frac{a_z}{(1-\beta^2)^{3/2}}.$$

ここで z 軸は相対速度の方向に選ばれている．

16. （7―90）式で与えられる運動量を用い，運動方程式（7―89）を展開することによって，力は，速度が加速度に平行であるか垂直であるかのいずれかである時に限って，加速度に平行であることを示せ．これら2つの場合における加速度の係数に対する表式を求めよ．古い文献では，これらの係数は，それぞれ，縦および横質量として知られている．

17. 静止質量 m_1，m_2 の2個の粒子が，観測者の z 軸に沿ってお互いに向ってそれぞれ v_1，v_2 の速さで動いている．これらは衝突するとき，合体して観測者に対して速さ v_3 で動く静止質量 m_3 の1個の粒子になる．m_3 および v_3 を m_1, m_2, v_1 および v_2 を用いて表わせ．m_1，m_2 のいずれも零でないときに，衝突の結果としてできる粒子が光子，すなわち，$m_3 = 0$ の粒子であることは可能だろうか．

18. 第1章の演習問題1で考えた β-崩壊において，電子は0.511 MeVの静止エネルギーに相当する質量をもち，一方，ニュートリノ（neutrino）は質量を持たない．電子とニュートリノの運び去る全エネルギーはいくらか？　また，原子核の質量のどれだけの割合が運動エネルギー（電子の静止質量も含めて）に転換されるか？ p.337

19. 質量 π の中間子（meson）が静止してから，質量 μ の中間子と質量零のニュートリノに崩壊する．μ-中間子の運動エネルギー（すなわち静止エネルギーを除いたもの）は，

$$T = \frac{(\pi-\mu)^2}{2\pi}c^2,$$

で与えられることを示せ．

20. 静止質量139.6 MeVの π^+ 中間子が，実験室系で静止している中性子（静止質量939.6 MeV）に衝突して，K^+ 中間子（静止質量494 MeV）と Λ ハイペロン（静止質量1115 MeV）を発生する．実験室系における，この反応のエネルギーしきい値はいくらか．

21. 光子は，古典的には，質量は零であるが，有限の運動量 $h/\lambda = h\nu/c$ を持ち，したがって運動エネルギー $h\nu$ を持つ粒子として記述される．もし光子が静止している質量 m の電子と衝突するならば，それはある角 θ の方向に，新しいエネルギー $h\nu'$ をもって散乱されるであろう．この場合，光子のエネルギーの変化は，散乱角 θ と次の式で関係づけられることを示せ．

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

ここで $\lambda_c = h/mc$ はCompton 波長として知られている．またこのときの電子の反跳運動の運動エネルギーは，

$$T = h\nu \frac{2\left(\dfrac{\lambda_c}{\lambda}\right)\sin^2\theta/2}{1+2\left(\dfrac{\lambda_c}{\lambda}\right)\sin^2\theta/2},$$

で与えられることを示せ．

22. エネルギー$\mathscr{E}$の光子が，エネルギーEの他の光子に角θで衝突する．質量mの粒子対の発生を許す$\mathscr{E}$の最小値は，次式で与えられることを証明せよ．

$$\mathscr{E}_{th} = \frac{2m^2c^4}{E(1-\cos\theta)}\,.$$

23. 第1章の演習問題3で述べた，ロケットの運動の理論は相対論的な領域ではもはや適用することはできない．その理由の一部は，質量保存則がもはや成立しないからである．その代わりに，相対性理論では，すべての保存則は結合されて，世界運動量の保存則になる．したがって，無限小時間 dt の間のロケットの世界運動量の各成分の変化は，その時間の間に放出されるガスに対する p_ν の同じ成分の値と，つり合わなければならない．もし，ロケットに外力が作用していないならば，質量の関数としての，ロケットの速度に対する微分方程式は，

$$m\frac{dv}{dm} + a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 0\,,$$

で与えられることを示せ．ここでaは，ロケットに相対的な排気ガスの一定の速度である．この方程式の解は次の形に書くことができることを証明せよ．

$$\beta = \frac{1-\left(\dfrac{m}{m_0}\right)^{\frac{2a}{c}}}{1+\left(\dfrac{m}{m_0}\right)^{\frac{2a}{c}}}\,.$$

p.338
ここでm_0はロケットの最初の質量である． 質量が保存されないとすれば，この失われた質量はどうなるか？

24. 原点で静止している状態から出発する双曲線運動において，原点から時間 t_0 後に光子が放出されたとするとき，それが決して粒子に追いつけないような時間 t_0 を見出せ．

25. 質量 m，電荷 q，および初速度 $\mathbf{v}_0$ をもつ粒子が， $\mathbf{v}_0$ に垂直な，一様な電場$\mathbf{E}$の中へはいってくる．その後の粒子の軌道を求め，それはcが無限大になる極限では放物線になることを示せ．

26. 逆自乗の法則に従う引力を受けて運動する粒子の相対論的運動は，歳差運動をす

る楕円であることを示せ．この効果によって生じる，水星の近日点の移動を計算せよ（答は，1世紀当り約7″であって，1世紀当り40″という実測値に比べてはるかに小さい．これは一般相対性理論によって初めて正しく説明することができる）．

27. 運動方程式（7－89）から出発して，ビリアル定理に対応する相対論的な定理を導け．この定理は空間的に有界な運動に対して，粒子の速度がいくらでも c に近づくことのないような場合には，

$$\overline{L_0} + \overline{T} = -\overline{\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}},$$

であることを述べるものである．ここで L_0 は外力のない場合のラグランジアンの形である． L_0 も T も， 正確には非相対論的力学における運動エネルギーに対応するものではないが，それらの和 L_0+T は非相対論的なビリアル定理（（3－26）式参照） における運動エネルギーの2倍と同じ役割を演ずることに注意せよ．

28. ただ1個の粒子に対する共変ラグランジアンの中で用いるのに適当な1つの一般化ポテンシャルは，

$$\mathscr{U} = -A_{\lambda\nu}(x_\mu)u_\lambda u_\nu,$$

である．ここで $A_{\lambda\nu}$ は2階の対称世界テンソルを表わし，u_ν は世界速度の成分である．ラグランジアンが（7－164）式から $\mathscr{U}$ を引いたものとして作られるとき，Lagrange の運動方程式を求めよ．Minkowski の力はどうなるか？あるLorentz系から観測されるときの力の成分を求めよ．

29. もし Λ がLagrange の方程式を満足するならば，式の中に現われる θ に関する全導関数を陽に計算することによって，Λ はその同次性に基づいて（7－161）式を恒等的に満足することを示せ．

30. 固有時を用いた，1個の粒子に対する共変Lagrange方程式は，Lagrange の未定乗数法によって（7－75）式の拘束条件を持ち込むことによって構成された．ラグランジアン Λ（ τ には陽に依存しないものと仮定する）は，変分原理において，

$$\Lambda' = \Lambda + \frac{\lambda(\tau)}{2}(c^2 + u_\mu u_\mu),$$

で置き換えられる．λ に対するEuler－Lagrange の方程式は（7－75）式を与えることを示せ． x_μ に対するEuler－Lagrange の方程式は τ に関する λ の導関数を含んでいる．これらの方程式は，λ に対する1つの表式を与えるように積分することができて，次の Lagrange の方程式に導くことを示せ．

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial u_\nu}\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2}\right) - \frac{\Lambda u_\mu}{c^2}\right] - \frac{\partial\Lambda}{\partial x_\mu} = 0$$

付録 A. Bertrandの定理の証明*)

p. 601

保存的な中心力の下での軌道方程式（3－34）は，

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = J(u), \tag{A-1}$$

と書くことができる．ここで

$$J(u) = -\frac{m}{l^2}\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{m}{l^2u^2}f\left(\frac{1}{u}\right), \tag{A-2}$$

である．半径 $r_0 = u_0^{-1}$ の円軌道に対する条件，（3－41）式は，

$$u_0 = J(u_0), \tag{A-3}$$

の形をとる．もちろん，それに加えて，エネルギーは条件（3－42）式を満足しなければならない．もしエネルギーが軌道が円形であるのに必要な値よりわずかに上にあって，またポテンシャルが，運動が安定であるようなものであるならば，u はやはり有界であって u_0 からわずかに変わるだけである．そのとき $J(u)$ は $J(u_0)$ のまわりの Taylor 展開の第１項で表わすことができる．

$$J(u) = u_0 + (u - u_0)\frac{dJ}{du_0} + O((u - u_0)^2). \tag{A-4}$$

普通よくやられるように，（A－4）式の中の導関数は，$u = u_0$ で計算された u に関する J の導関数の値を短かく表わしたものである．差 $u - u_0$ を x で表わすと，円軌道に近い運動の軌道の運動方程式は，

---

*）第３－６節を見よ．

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}+x=x\frac{dJ}{du_0},$$

あるいは,

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}+\beta^2x=0,\qquad (\mathrm{A}-5)$$

p.602
となる. ここに,

$$\beta^2=1-\frac{dJ}{du_0},\qquad (\mathrm{A}-6)$$

である. x が有界で安定な振動を記述するためには, β^2 は正定符号でなければならない. 定義の (A－2) 式から,

$$\frac{dJ}{du}=\frac{2m}{l^2u^3}f\left(\frac{1}{u}\right)-\frac{m}{l^2u^2}\frac{d}{du}f\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{2J}{u}-\frac{m}{l^2u^2}\frac{d}{du}f\left(\frac{1}{u}\right),$$

が得られる. 円軌道の条件 (3－41) 式あるいは (A－3) 式を見れば,

$$\frac{dJ}{du_0}=-2+\frac{u_0}{f_0}\frac{df}{du_0},$$

が導かれる. ここで, 導関数に対して用いられた規約に加えて, f_0 は $f(1/u_0)$ を表わす. それゆえ β^2 は,

$$\beta^2=3-\frac{u_0}{f_0}\frac{df}{du_0}=3+\frac{r}{f}\frac{df}{dr}\bigg|_{r=r_0},\qquad (\mathrm{A}-7)$$

で表わされるが, これは(3－46) 式と同じであり, 安定性の条件 $\beta^2>0$ は (3－43) 式に帰着される.

θ の原点を適当に選ぶことによって, β^2 が正定符号であるときの (A－5) 式の解は,

$$x=a\cos\beta\theta,\qquad (\mathrm{A}-8)$$

と書くことができる ((3－45)式 参照). したがってエネルギーや角運動量が, 円軌道からわずかに乱されたときに, 軌道が閉じたままであるためには, 量 β は有理数でなければならない. われわれは, 初期条件の広い範囲, すなわち.u_0 の広い範囲に対して, 円軌道からわずかにずれた軌道が, やはり閉じたま

までであるような，力の法則を見出すことに関心をもっている．本文で論じたように，このような状況の下では，βはu_0の全領域で同じ値を持たなければならず，また(A－7)式は$f(1/u)$あるいは$f(r)$に対する微分方程式とみなすことができる．それゆえ，求めている力の法則は，(3－48)式に与えられているrへの依存性と合致しなければならない．すなわち，

$$f(r) = -\frac{k}{r^{3-\beta^2}}\,, \qquad (3-48)$$

でなければならない．ここでkはある定数で，βは有理数である．

力の法則(A－8)式は，まだ力の振舞いとしていろいろ変わった様式を許すものである．しかしながら，われわれは，円軌道からのはずれがかなりの大きさであっても，軌道が閉じたままであることを要求することによって，力の法則に対するもっと厳しい条件を探してみよう．そこでわれわれは，uのu_0からのずれが大きくて，$J(u)$の Taylor 級数の最初の項より高次の項まで残しておかなければならない場合を取り扱わなければならない．(A－4)式はしたがって次の式で置き換えられる．

$$J(u) = u_0 + xJ' + \frac{x^2}{2}J'' + \frac{x^3}{6}J''' + O(x^4). \qquad (A-9)$$

p. 603
ここで，導関数はu_0で計算されるものとする．この$J(u)$の展開を用いれば，軌道の方程式は次のようになる．

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \beta^2 x = \frac{x^2 J''}{2} + \frac{x^3 J'''}{6}. \qquad (A-10)$$

われわれは，円軌道からのはずれxが十分大きくて，右辺の項が省略できないときでさえも，方程式(A－10)の解がやはり閉じた軌道を表わすような，力の法則の性質を求めたいのである．円軌道からの小さい摂動に対しては，xは(A－8)式で記述される振舞いをすることを知っている．これは，$\beta\theta$についての Fourier 展開における基本的な項を表わしている．それゆえ，われわれは，Fourier 展開におけるもう少し多くの項を含めることによって，閉じた軌道の解を求めよう．そのために，

$$x = a_0 + a_1 \cos \beta\theta + a_2 \cos 2\beta\theta + a_3 \cos 3\beta\theta\,, \qquad (\text{A}-11)$$

とおく．振幅 a_0 と a_2 とは，それらが，円軌道に近づくとき a_1 より早く零にならなければならないから，a_1 よりも大きさが小さくなければならない．後にわかるように，さらに a_3 は a_0 および a_2 よりも低い次数の大きさでなければならない．このことは，$\cos 4\beta\theta$ およびそれ以上の項を省略することができる理由である．その結果，(A−10)式の右辺の x^2 の項においては，$\cos 3\beta\theta$ を含む項を落し，また，x^3 の項では $\cos \beta\theta$ を含む因子だけを残せばよいのである．右辺を計算する場合に，コサイン関数のべきや積を計算することは，次のような恒等式を用いることによって簡単化される．

$$\cos \beta\theta \cos 2\beta\theta = \tfrac{1}{2}(\cos \beta\theta + \cos 3\beta\theta)\,,$$

および,

$$\cos^3 \beta\theta = \tfrac{1}{4}(3 \cos \beta\theta + \cos 3\beta\theta)\,.$$

このような方法で，a_1^3 の程度の項をつじつまの合うように残しておくと，解を(A−11)式とすると方程式(A−10)は，次のようになる．

$$\begin{aligned}\beta^2 a_0 - 3\beta^2 a_2 \cos 2\beta\theta - 8\beta^2 a_3 \cos 3\beta\theta \\ = \frac{a_1^2}{4} J'' + \left[\frac{2a_1 a_0 + a_1 a_2}{2} J'' + \frac{J''' a_1^3}{8}\right] \cos \beta\theta \\ + \frac{a_1^2}{4} J'' \cos 2\beta\theta + \left[\frac{a_1 a_2}{2} J'' + \frac{J''' a_1^3}{24}\right] \cos 3\beta\theta.\end{aligned} \qquad (\text{A}-12)$$

この解が正しいためには，各コサイン項の係数が別々に零にならなければならない．このことは，振幅と導関数について次の 4 つの式に導く．

$$a_0 = \frac{a_1^2 J''}{4\beta^2}, \qquad (\text{A}-13\text{a})$$

$$a_2 = -\frac{a_1^2 J''}{12\beta^2}, \qquad (\text{A}-13\text{b})$$

p. 604

$$0 = \frac{2a_1 a_0 + a_1 a_2}{2} J'' + \frac{J''' a_1^3}{8}, \qquad (\text{A}-13\text{c})$$

$$a_3 = -\frac{1}{8\beta^2}\left[\frac{a_1 a_2}{2}J'' + \frac{J''' a_1^3}{24}\right]. \qquad \text{(A−13 d)}$$

われわれは，円軌道からのわずかなずれを基にして，閉じた軌道に対しては，力の法則は(A－8)式の形を持たなければならないこと，あるいは $J(u)$ が,

$$J = +\frac{mk}{l^2}u^{1-\beta^2} , \qquad \text{(A−14)}$$

で与えられなければならないことをすでに示したことを思い出すべきである．円軌道の条件，(A－3)式を心に留めておくと，u_0における いろいろの導関数は，次のように計算することができる．

$$J'' = -\frac{\beta^2(1-\beta^2)}{u_0} , \qquad \text{(A−15 a)}$$

および,

$$J''' = \frac{\beta^2(1-\beta^2)(1+\beta^2)}{u_0^2} . \qquad \text{(A−15 b)}$$

このようにして，(A－13 a，b)式は a_0/a_1 と a_2/a_1 が a_1/u_0 の程度であることを述べている．a_1/u_0 は仮定によって小さい数である．さらに(A－13 d)式は，a_3/a_1 は $(a_1/u_0)^2$ の程度であることを示しているが，これは a_3 が a_0 あるいは a_2 よりも低い大きさの程度であるという，前に述べた命題を正当化するものである．(A－13c)式は β のみに関する条件であって，この条件が実際には Bertrand の定理の主要な結論である．(A－13 a，b)と(A－15)式を，(A－13 c)式に代入すると，次の条件が得られる．

$$\beta^2(1-\beta^2)(4-\beta^2) = 0. \qquad \text{(A−16)}$$

円軌道からのはずれ，すなわち $\beta \neq 0$ に対しては，解は,

$$\beta^2 = 1, \qquad f(r) = -\frac{k}{r^2} , \qquad \text{(A−17 a)}$$

および

$$\beta^2 = 4, \qquad f(r) = -kr , \qquad \text{(A−17 b)}$$

の２つだけである．このように，解と矛盾しない２つの可能な力の法則は，重

力のような逆２乗の法則か，Hooke の法則かのいずれかである！

われわれは，軌道が円形である場合から出発した．このことは，広い範囲の l と E にわたって，すべての引力に対して可能である．l と E の値は逆に軌道の半径を決めることになる．円形軌道がすべての半径に対して**安定**であるという要求は，$\beta^2>0$，(３－43) 式という不等式条件を通して，力の法則の形を制限する．さらに，もし，考える軌道の半径がいくらであろうと，円軌道からわずかにはずれただけの軌道が，やはり閉じているような力の法則を探すならば，その力の法則は，β が有理数の値をもつ (A－8) 式によって与えられる離散的な組に制限される．考える軌道の初期条件がどうであろうと，円軌道からのより大きいはずれに対しても，軌道が閉じたままであるためには，これら有理数の値のうちの２つだけが許されるのである．すなわち $|\beta|=1$ と $|\beta|=2$ である．これらの引力の法則は，E と l のすべての値に対して，閉じた軌道を与え，有界な運動に導くから，すべての有界な運動に対して閉軌道に導く力の法則は**これだけ**でなければならない．

p. 605

付録 B．別な規約によるEulerの角*

p. 606

本文で述べられた Euler の角は，最初の z 軸のまわりの角 ϕ の第１の回転，中間的な x 軸のまわりの角 θ の第２の回転，そして最後の z 軸のまわりの角 ψ の第３の回転によって指定された．この回転の列を，ここでは第２の回転の選び方に関連させて“x 規約”と示すことにする．他の規約も可能であって，そのうち特に２つが，特定の分野においてしばしば応用されている．ここでは，これら２つの別の規約での Euler の角を用いた，一般の回転の性質に対する公式が与えられるであろう．

y 規約

本文でも言及したように，この規約は，量子力学およびそれに関連した分野での，殆ど標準的な手法になってきた．これが x 規約と違うのは，第２の回転が，中間的な y 軸のまわりに行われるということだけである．x 規約から y 規約への書き換えは，θ の意味が両方の規約で同じに保たれているので，特に簡単であって，そして他の角に対する変更も容易に得られる．x 規約では，ϕ は x 軸と節線の間の角である．一方 y 規約では，y 軸への同じ角の尺度である．同じように，x 規約では，ψ は節線と x' 軸との間の角であって，一方 y 規約では，それは y' 軸に関する同じ角である．一時的に，用いられる規約の記号を添字に使えば，これらの関係は次のような結びつきがあることを意味する（図４－７参照）．

---

*）第４－４節を見よ．

$$\phi_x = \phi_y + \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_x = \psi_y - \frac{\pi}{2}. \tag{B-1y}$$

あるいは，

$$\sin\phi_x = \cos\phi_y, \qquad \sin\psi_x = -\cos\psi_y, \qquad \cos\phi_x = -\sin\phi_y, \qquad \cos\psi_x = \sin\psi_y. \tag{B-2y}$$

p. 607
この処方によって，y 規約における Euler の角で表わした次の公式が得られる．

回転行列：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \sin\psi\cos\phi + \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\cos\psi\sin\theta \\ -\cos\psi\sin\phi - \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{B-3y}$$

x のかわりに y を用いることが，z 軸のまわりに角 $-\pi/2$ あるいは$3\pi/2$だけ基準系を回転することに対応することに注意することによって，同じ結果を得ることができる．それゆえ，次の直交行列 **G** による相似変換によって，行列 **A** を x 規約から y 規約へ移すことができる．

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これを行えば再び（B－3y）式に導かれる．

Cayley-Klein のパラメーター． 前のように，**Q** 行列は，各回転に対する **Q** 行列の積として求めることができる．ただ１つの違いは $\mathbf{Q}_\theta$ 行列についてであって，今の場合には，それは，

$$\mathbf{Q}_\theta = e^{i\sigma_2\frac{\theta}{2}} = \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\boldsymbol{\sigma}_2\sin\frac{\theta}{2}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{B−4y}$$

である．行列の積 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\phi$ から（あるいは変換の式（B−3）によって），Cayley-Klein のパラメーターとして次のものが得られる．

$$\alpha = e^{i\left(\frac{\psi+\phi}{2}\right)}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad \beta = e^{i\left(\frac{\psi-\phi}{2}\right)}\sin\frac{\theta}{2},$$
$$\gamma = -e^{-i\left(\frac{\psi-\phi}{2}\right)}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \delta = e^{-i\left(\frac{\psi+\phi}{2}\right)}\cos\frac{\theta}{2}. \tag{B−5y}$$

p. 608

Euler のパラメーター．　（4−65）式と（B−5y）式から，y 規約においては，Euler のパラメーターが，

$$e_0 = \cos\frac{\psi+\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad e_2 = \cos\frac{\psi-\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2},$$
$$e_1 = \sin\frac{\psi-\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad e_3 = \sin\frac{\psi+\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}. \tag{B−6y}$$

によって与えられることが直ちに導かれる．

角速度の成分．　変換の式（B−2）を直接用いるか，あるいは $\boldsymbol{\omega}$ の各成分の物理的意味を通して導くかのいずれかによって，y 規約における，物体軸に沿う $\boldsymbol{\omega}$ の次のような成分を得ることができる．

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= -\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi,\\ \omega_{y'} &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,\\ \omega_{z'} &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}.\end{aligned} \tag{B−7y}$$

同じように，空間軸に沿う $\boldsymbol{\omega}$ の成分は，

$$
\begin{aligned}
\omega_x &= -\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi, \\
\omega_y &= \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi, \\
\omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi},
\end{aligned}
\qquad (\text{B}-8\text{y})
$$

である．最後に，

$$
\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) = e_0 = \cos\frac{\psi+\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad (\text{B}-9\text{y})
$$

であることを注意しておく．これは x 規約に対する（4－97）式と同じである．

xyz 規約

この規約では，各回転は，異なるラベルのついた軸のまわりの回転である．明らかに，ここでもやはり，回転のいろいろな列が可能である．大部分の，アメリカおよびイギリスの航空力学者*は，次のような回転の列を好むように見える．すなわち，第 1 の回転は z 軸のまわりの（**首ふりの**）偏りの角（*yaw angle*）ϕ，第 2 の回転は中間的な y 軸のまわりの（**縦ゆれの**）**傾角**（*pitch angle*）θ，そして第 3 の回転としては最後の x 軸（あるいは機体の対称軸）のまわりの（横ゆれの）**バンク**（*bank*）あるいは**ロール**（*roll*）の角 ψ を用いるのである．**

3 つの基本回転のうちで行列 **D** は（4－43）式と同じ形のままであって，**C** は，

$$
\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad (\text{B}-10\text{xyz})
$$

p. 609

のようになる．そして **B** は（4－44）式と同じである（もちろん，その際 θ を ψ で置き換える）．積 **BCD** は，次の回転行列を与える．

回転行列

---

*) R. L. Pio, "Euler Angle Transformations," *IEEE Transactions on Automatic Control* AC11, 707（1966）を見よ．

**) 工学の文献では，これは時には 321 系列と呼ばれることがある．これは最初の回転が 3 軸のまわりのものであること等々を示す．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \cos\theta\sin\psi \\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi & \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi & \cos\theta\cos\psi \end{pmatrix}. \quad \text{(B−11xyz)}$$

Cayley-Klein のパラメーター． **Q**行列は次のように与えられる．

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\phi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2} & i\sin\frac{\psi}{2} \\ i\sin\frac{\psi}{2} & \cos\frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}.$$

掛け算を実行すると， Cayley-Klein のパラメーターは次の形をもつことが見出される．

$$\begin{aligned} \alpha = \delta^* &= \left(\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi/2}, \\ \beta = -\gamma^* &= \left(\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi/2}. \end{aligned} \quad \text{(B−12xyz)}$$

Euler のパラメーター． (B−11xyz)式から Euler のパラメーターは，

$$\begin{aligned} \cos\frac{\Phi}{2} = e_0 &= \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}, \\ e_1 &= \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} - \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}, \\ e_2 &= \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}, \\ e_3 &= -\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}, \end{aligned} \quad \text{(B−13xyz)}$$

であることが導かれる．回転角のコサインは x 規約とも y 規約とも異なっていることに注意せよ．

角速度の成分．　明らかに $\boldsymbol{\omega}_\psi$ は物体 x 軸に沿い，$\boldsymbol{\omega}_\phi$ は空間 z 軸に沿い，また $\boldsymbol{\omega}_\theta$ は中間 y 軸に沿っており，したがって最後の yz 平面内にある．その結果得られる物体軸に沿う成分は，

$$
\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \dot{\psi} - \dot{\phi}\sin\theta, \\
\omega_{y'} &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\cos\theta\sin\psi, \\
\omega_{z'} &= -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\cos\theta\cos\psi,
\end{aligned}
\tag{B−14xyz}
$$

p. 610 である．同じように $\boldsymbol{\omega}$ の空間軸方向の成分は，

$$
\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi, \\
\omega_y &= \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi, \\
\omega_z &= \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta,
\end{aligned}
\tag{B−15xyz}
$$

である．

付録 C. $d\Omega$の変換性*)

p. 611
成分 $d\Omega_j$は3×3反対称行列 $\boldsymbol{\epsilon}$，（4－105）式，の要素であって，順列記号を用いて，形式的に次のように与えられる．

$$\epsilon_{mn} = \epsilon_{mnj}\, d\Omega_j. \tag{C-1}$$

行列が $\mathbf{B}$ である1つの直交変換の下で，行列 $\boldsymbol{\epsilon}$ は相似変換によって，

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{B}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}\boldsymbol{\epsilon}\tilde{\mathbf{B}}, \tag{C-2}$$

のように変換される．典型的な成分は，

$$\epsilon'_{kl} = b_{km} b_{ln} \epsilon_{mn}, \tag{C-3}$$

である．反対称性は，相似変換の下で保存される．それゆえ $\boldsymbol{\epsilon}'$の要素はまた，

$$\epsilon'_{kl} = \epsilon_{kli}\, d\Omega'_i, \tag{C-4}$$

と書くこともできる．

反対称行列のこのような表現を用いると，$d\Omega_j$の変換性は

$$\epsilon_{kli}\, d\Omega'_i = b_{km} b_{ln} \epsilon_{mnj}\, d\Omega_j, \tag{C-5}$$

によって与えられる．

もし $\mathbf{A}$が，任意の3×3行列であるならば，$\mathbf{A}$の行列式は次式で与えられる**）

$$|\mathbf{A}| = \epsilon_{pqi} a_{pm} a_{qn} a_{ij}, \tag{C-6}$$

p. 612
ここで，mnj は1，2，3のサイクリックな順列である．mと n を交換すると，

---

*）第4－8節を見よ．

**）次頁．

順列はサイクリックではなくなるが，明らかに表式の符号を変える．それは，この操作は，行列式の２つの列を交換するのと等価だからである．さらに，この表式は添字 mnj のうちの任意の２つが等しいと零になる．なぜならば，２つの等しい列をもつ行列式は零だからである．添字に関するこれらの性質は，正確に順列記号のそれと同じである．それゆえ，（Ｃ－６）式はもっと一般的に，添字 mnj に対する制限なしに，

$$\epsilon_{mnj}|\mathbf{A}| = \epsilon_{pqi}a_{pm}a_{qn}a_{ij}\,, \qquad (C-7)$$

と書くことができる．（Ｃ－７）式は直交行列 **B** に適用することができ，直交行列の行列式の２乗は常に＋１であることを思い出せば，

$$\epsilon_{mnj} = \epsilon_{pqi}b_{pm}b_{qn}b_{ij}|\mathbf{B}|, \qquad (C-8)$$

が得られる．そうすると（Ｃ－５）式は次のように書き換えられる．

$$\epsilon_{kli}\,d\Omega'_i = \epsilon_{pqi}b_{km}b_{pm}b_{ln}b_{qn}b_{ij}|\mathbf{B}|. \qquad (C-9)$$

B の直交性から，

$$b_{km}b_{pm} = \delta_{kp}, \qquad b_{ln}b_{qn} = \delta_{lq}\,,$$

となり，それゆえ（Ｃ－９）式は，

$$\epsilon_{kli}\,d\Omega'_i = \epsilon_{kli}|\mathbf{B}|b_{ij}\,d\Omega_j\,, \qquad (C-10)$$

となる．したがって，

$$d\Omega'_i = |\mathbf{B}|b_{ij}\,d\Omega_j\,, \qquad (C-11)$$

が導かれるが，これはわれわれが証明しようと望んでいた結果，すなわち（４－110）式である．

前頁） 線型代数学あるいは“大学代数学（college algebra）”に関する大部分の書物は，行列式に対してこれと同等な展開式を与えている．例えば，R. R. Stoll, *Linear Algebra and Matrix Theory*, p. 92, Lipschutz, *Theory and Problems of Linear Algebra*, p. 172, および，G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, p. 157 を参照せよ．事実，より古い書物では（Ｃ－６）式が行列式の定義として用いられている．例えば，H. W. Turnbull による包括的な単行本，*The Theory of Determinants, Matrices and Invariants*, p. 12（もっと近代的な方法は，行列式を，その演算の性質を用いて定義するものである）．また，G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, の第４章，T. C. Bradbury, *Theoretical Mechanics*, pp.26－28, および G. Goertzel and N. Tralli, *Some Mathematical Methods of Physics*, Appendix 1A を見よ．

記　号　索　引

p. 631 いろいろな記号を選ぶに当っては，できるだけある一般原理に従うようにした．ベクトルはボールド体（肉太の）のローマ字体で示し，２階あるいはそれより高階のテンソルと行列は肉太のサンセリフ字体で表わされている．ベクトルが特に１階のテンソルとして取り扱われるとき，あるいは１列（あるいは１行）行列によって表わされる場合には，時には肉太のローマ字体で表わすこともあるが，もっともしばしば，サンセリフ字体が用いられている．ギリシャ文字の記号に対しても，ベクトル，テンソルおよび行列に対しては，同じ肉太字体が用いられる．

文字の上の点は，常に時間に関する微分を示す．プライムは，しばしば，ある種の変換を受けた量を示すのに用いられる．第４章では，座標につけたプライムは，空間軸に関するプライムのない空間座標と区別して，剛体軸に関する値を示すものである．しかし後もずっとそうであるわけではない．一般に，プライムはまた，質量中心に相対的なある量を含む記号の印としても用いられる．さらにそれに加えて，プライム記号には多くの他の例外的な用法がある．これらは与えられた議論の文脈の中で明らかになるであろう．しかしながら，２つの例だけは特に注意しておく．実験室系の角（質量中心系の角ではなく）を用いて表わした散乱断面積にはプライム記号がつけてある（152ページを見よ）．また，第７－９節の文字につけられたプライムは，時間のかわりに用いられたパラメーター θ に関する微分を示すものである．

多くの公式の外見を簡潔にするために，時折，いろいろな添字記号が，その添字のついた変数（あるいは指数）に関する微分を示すのに用いられている．（下巻を見よ）．

正準変換を論じるときには，しばしば元の変数を小文字で表わし，大文字を変換された量に対して用いた．添字０はしばしば，初期値あるいは釣り合いに

おける値を示す．普通行われるように，複素共役は星印（asterisk）で表わした．星印をこれ以外の意味に用いるときには，常に特別に注意してある．

この記号索引は完全であることを意図してはいない．普通に使用されている記号，例えば直交座標(x, y, z)，平面曲座標(r, θ)（あるいはその変種として(r, ϕ), (r, ψ)等），空間極座標(r, θ, ϕ)あるいは，ベクトル解析の記号，に対しては索引を作る必要は殆んどない．一般的にいって，この索引では（曖昧さがあるかもしれない場合を除き），それらの定義のある数ページの中でのみ用いられ，後に同じ意味で再び用いられることがないような，“その場限りの”記号は省かれている．

演習問題の中で定義された記号は，それが広い有用性をもっているか，あるいは曖昧さを生じさせるかもしれない場合を除き，通例索引には入れてない．そのようなものはページ数がイタリック体で示してある．2つあるいはそれより多くのページが記されているときには，第1番目のものは，最初に出てきたところの，しばしば付随的な参考にしかならないページ数である．それに続くページは，より十分な定義や記述が与えられていることを示すものである．

p. 632

ギリシャ文字の記号索引

いろいろな記号

索　　引

（上　　巻）

（イタリックで印刷されているページ数は，演習問題に関するものであることを示す）

カ 行

マ 行

ヤ 行

ラ 行

ISBN4－8427－0000－9

物理学叢書
編　集
小　谷　正　雄
（東京大学名誉教授）
小　林　　稔
（京都大学名誉教授）
井　上　　健
（京都大学名誉教授）
山　本　常　信
（京都大学名誉教授）
高　木　修　二
（大阪大学名誉教授）

〔訳　者　紹　介〕
瀬川富士（せがわとみお）
愛媛大学名誉教授
理学博士
矢野　忠（やのただし）
現在愛媛大学 工学部 教授
理学博士
江沢康生（えざわやすお）
現在愛媛大学教養部教授
理学博士

ゴールドスタイン：新版古典力学（上）
1983 ©

1983年 8 月25日　第 1 刷発行
2000年12月25日　第 9 刷発行

訳　者　瀬　川　富　士
矢　野　　忠
江　沢　康　生

発行者　吉　岡　　誠

京都市左京区田中門前町87
発行所　吉　岡　書　店
電（075）781－4747／振替01030-8-4624

印刷　ショウワドウ・イープレス株式会社
製本　有限会社　藤沢製本

ISBN4－8427－0208－7

「物理学叢書」刊行に際して

二十世紀の物理学の進歩は，物質の極微の構造の蘊奥に，物質の精妙な機構の解明に，鬱勃的な発展，飛躍をもたらした．その結果，新しい自然力の解放，支配を実現化したばかりでなく，新しい物質の創造，生命の謎への挑戦をも企画せしめつつある．更に，既知の自然力の未曾有の強力な駆使さえ可能にしつつある．二十世紀後半に至って，原子力に，あるいはオートメーションに今や第二の産業革命を喚起せんとするに至った原動力は，物理学の開拓的な創造性によることは言をまたない．更に，現在の物理学は，かつての相対論，量子論の出現にも比す驚くべき革命の前夜にあるといわれているこの時に当たり，物理学の新領域の単なる解説，あるいは時局的な技術書ではなく，真にわが国物理学の発展の糧となるべき良書の出版は緊急の必要事といわねばならぬ．ここに「物理学叢書」を編んで世に送る所以である．

この叢書に収められる原著は，いずれもそれぞれの分野の世界的権威者による定評ある名著に限られるが，前述の精神に鑑みその性格，スタイルに特徴あるものを選ぶと共に，その本質において創造的価値高きものを目標とした．

この叢書が，物理学またはその関連分野へ進む学徒に，よき伴侶として用いられ，真にその血肉となり得ることがわれわれの念願であり，更にこの叢書によって伝えられる海外の学風が，広くわが国の教育，研究へのよき刺戟となり，わが国の明日の科学を築く基礎に貢献するところがあれば幸いである．

(1954年12月)

物　理　学　叢　書

編集・小谷正雄／小林　稔／井上　健／山本常信／高木修二

シッフ　井上　健訳
新版 量子力学 上・下
上 368頁　下 320頁
刊行以来無比の標準的教科書として絶賛を博してきた本書は，原著第3版刊行にともない全面的に版を改めた．基本的な概念やその数学的形式を丁寧に解説されている量子力学の入門書である．

ゴールドスタイン　瀬川富士他訳
新版 古典力学 上・下
上 528頁　下416頁
最近，物性物理や素粒子物理を学ぶ人の間に，古典力学はきちんと学ぶべきだという気持が強い．本書は，場の理論から，多体系の物理学を研究する上で，基本的な入門書であり，古典力学を新しい見地から解説．

モット，マッセイ　高柳和夫他訳
新版 衝突の理論
(全4巻)上Ⅰ　上・Ⅱ 328頁
下Ⅰ　下・Ⅱ 232頁
量子力学の重要な適用対象である衝突理論を丁寧に述べた代表的教科書である．衝突の一般論と，電子衝突，原子と原子の衝突，さらに原子核による核子の散乱など多くの実際問題を扱っている．

ライフ　中山寿夫・小林祐次訳
統計熱物理学の基礎 上・中・下
上 388頁　中 352頁　下 品 切
統計力学の基礎概念から応用まで体系的に取扱い，初心者が容易に理解できるよう豊富な例題を駆使して懇切丁寧に解説した学部学生向き教科書の決定版．化学・生物の学生にも理解し易い記述である．

キャレン　山本常信・小田垣孝訳
熱力学 上・下
上 品 切　下 216頁
この教科書は従来の歴史的発展に沿った記述を取らず，いくつかの公理に基づいて熱力学を再構築し，論理構造を明確にした．今後の熱力学の発展と飛躍のためにこのような安定化のもつ意義は深い．

頁数記載なきは品切もしくは未刊

ハーケン　松原武生・村尾　剛訳
固体の場の量子論 上下
——素励起物理学入門——　上 168頁　下 232頁
教養程度の知識のみで，短期間に系統的に場の量子論の方法と固体論への応用を完全に習得できる．上巻では多くの演習問題で理解を早め，下巻では現在の考え方・モデル・方法などが整然と解説されている．

アシュクロフト，マーミン　松原武生・町田一成訳
固体物理の基礎
（全4巻）上・Ⅰ 304頁　下・Ⅰ 288頁　上・Ⅱ 272頁　下・Ⅱ 280頁
学部生にも大学院生にも使えるよう工夫され，内容の取捨選択がしやすく，種々の目的，異なる水準でもうまく使い分けられる．固体物理学の現象の記述と理論的解析による統一という著者の目標は完全に達成されている．

ド・ジャン　久保亮五監修・高野・中西訳
高分子の物理学
——スケーリングを中心にして——　360頁
全く刷新された最近の高分子物理学の成果を，ド・ジャン自らが平明なスケーリング則の解説と共にまとめた労作である．むつかしい理論に立入らず，スケーリング則とその実験的検証を理解させるという立場を貫いている．

シュッツ　家・二間瀬・観山訳
物理学における幾何学的方法
328頁
本書は近年理論物理学において，極めて基礎的でかつ有効な数学的手法である微分幾何についての教科書である概念を中心に分かり易く解説してあり，物理学への応用も示してある．

J.J.Sakurai　桜井明夫訳
現代の量子力学 上下
上 392頁　下 320頁
素粒子物理学の独創的理論家であった著者が，ＵＣＬＡでの多年の講義に基づき書き遺した現代的教科書．非相対論的量子力学の核心が，最近の理論・実験の発展に則し，新しい視点から明快かつ具体的に記述されている．

ジョージアイ　九後汰一郎訳
物理学におけるリー代数
—アイソスピンから統一理論へ—　224頁
Glashow と共に $SU(5)$ に基づく素粒子の大統一理論を初めて提唱した著者が，その研究の苦闘の中で体得した豊富な実践的知識を込めて書いた，リー代数とその表現論のわかり易い解説書．

フォスター・ナイチンゲール　原　哲也訳
一般相対論入門
284頁
初学者には難解とも思える一般相対論の内容を，分り易く解き明かしてある．物質の存在が時空を歪め，その曲がりにより重力的現象が起因するという概念を平易，明快に解説．

ジーガー　山本恵一・林　真至・青木和徳訳
セミコンダクターの物理学
上・320頁　下・340頁
電子輸送現象にかなりの頁数を費やしており，企業の研究者にとっても最適である．さらに多くの図面により，物理現象の把握に役立つ．

ゲプハルト・クライ　好村滋洋訳
相転移と臨界現象
378頁
ランダウの相転移論から始まり，先年ノーベル賞の対象となったウイルソンのくりこみ群までを，あまり数式を用いず実験例との対応を明らかにするため，豊富な図表を用いて親しみ易く解説した現代的入門書．

ストルコフ・レヴァニューク　疋田朋幸訳
強誘電体物理入門
248頁
強誘電体の相転移を構造相転移の一つとみなし，統一的に基礎的な立場から記述．物質の各論や応用などには殆どふれず，物理的なエッセンスのみを抽出して解説する両著者ともにこの分野の世界的権威である．

パリージ　青木　薫・青山秀明訳
場の理論
―― 統計論的アプローチ ――　438頁
第一線の研究者の手になる量子場理論の最新の教科書，イジング模型，ランダウ・ギンツブルグ模型等を導入し，相転移の物理を基礎から説き起こす．素粒子論や統計物理を志す学生・院生のための教科書として最適．

キューサック　遠藤裕久・八尾　誠訳
構造不規則系の物理 上・下
上 286頁　下 282頁
構造不規則系の研究は物理学の魅力ある分野である．本書は構造不規則系の静的・動物構造，電子状態，またその応用について，実験，理論両面にわたる初めての総合的な教科書．

J.D.Jackson　西田　稔訳
ジャクソン電磁気学 上・下
（原書第２版）　上 648頁　下 480頁
標準的教科書として世界的に著名なジャクソンの原書第２版の翻訳．理論物理学，実験物理学，天体物理学，プラズマ物理学に関心をもつ学生，研究者に必携の書．第２版において更に最新の内容に充実，完成された．

アブリコソフ　東辻千枝子・松原武生訳
金属物理学の基礎 上・下
上 376頁　下 332頁
この分野で世界をリードしてきた著者が固体電子論の立場から集大成した．メソスコピック系や高温超伝導・セラミックスなども明快に解説されていおり，特に量子効果がマクロに観測される領域の部分は圧巻である．

メンスキー　町田　茂訳
量子連続測定と径路積分
272頁
量子論の基本問題を連続測定の観点から径路積分を使ってとらえ直し，初期宇宙での時間の出現なども論じている．日本語版では多くの追加がされており，読みやすい入門書となっている．

チャンドラセカール　木村初男・山下　護訳
液晶の物理学
原書第２版　544頁
最近20年の新成果を取り入れて全面的に改訂増補された．豊富な実験データの図版を用いて簡潔・明快であり，文献リストも非常に充実したアップツーデートな入門書である．

スティックス　田中茂利・長　照二訳
プラズマの波動 上・下
上 344頁　下 364頁
冷たいプラズマの波動の分類と特徴から始まり，プラズマの最も魅力的かつ特徴的なプラズマ粒子の集団的相互作用に基づく無衝突減衰（ランダウおよびサイクロトロン減衰）から弱乱流プラズマの準線形理論へと展開する．

スワンソン　青山秀明他訳
経路積分法
― 量子力学から場の理論へ ―　502頁
汎関数空間やグラスマン数など，初学者がとまどいやすい部分についても非常に丁寧な導入を行なっており，場の理論およびその素粒子物理への応用について概観するのにも適している．

ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳
粒子と量子場
場の量子論シリーズ①　432頁
簡単な歴史的記述から入り，相対性原理と量子力学の理論を用いて素粒子の性質を論じることにより「場の量子論」が自然の帰結として現れてくる．貴重な参考文献であると同時に，教科書として適切である，

アグラワール　小田垣　孝・山田興一訳
非線形ファイバー光学
原書第２版　688頁
光ファイバーにおける非線形効果の理論と応用の集大成光ファイバー内で起こるあらゆる非線形現象の背後にある物理を判りやすく解説し，さらに最先端の話題まで完全に網羅した類のない最新の名著．学生，研究者に必携．

ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳 **量子場の理論形式** 場の量子論シリーズ②　446頁	本書はS.Weinbergによる「場の量子論」全4巻の第2巻である．正準形式，ファイマン則，量子電磁理論，経路積分，くりこみ，などの理論形式の核となる部分が論じられる．
ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳 **非可換ゲージ理論** 場の量子論シリーズ③　376頁	現代の素粒子論における標準理論の基礎をなす非可換ゲージ理論が導入され，また場の理論の現代的手法である有効場の理論，くりこみ群，大域的対称性の自発的破れの一般論が展開される．
キャレン　小田垣　孝訳 **熱力学および統計物理入門** 上下 第2版　上330頁　下368頁	世界的に高い評価を得ている熱力学の代表的な教科書である．公理に基づく熱力学体系の構築は他に類をみない．上巻では平衡状態を定める条件が論じられ，下巻では相転移の熱力学への導入が詳しく論じられる．
ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳 **場の量子論の現代的諸相** 場の量子論シリーズ④　342頁	くりこみ群や対称性の破れにとって重要な演算子積展開，電弱理論のゲージ対称性の自発的破れが論じられる。これとは対称的に量子力効果として対称性を破るアノマリーと，それによる物理的結論が述べられる。
チエイキン，ルベンスキー　松原武生・東辻千枝子他訳 **現代の凝縮系物理学** 上 396頁　下 376頁	凝縮系の物理学を現代的な視点で扱った待望の書．臨界現象とくりこみ群の方法に特に注目し，扱う対象は液体・結晶・不整合結晶・準結晶・非晶質系に及ぶ．250以上の図，多くの演習問題，文献リストを含む．
Y．イムリー　樺沢宇紀訳 **メソスコピック物理入門** 314頁	固体電子の局在と緩和の一般論，典型的な題材である微細な系の永久電流と量子輸送，量子ホール効果，超伝導メソスコピック系，および雑音の問題を著者一流の観点から論じる．

別　巻

井上　健監修・三枝寿勝・瀬藤憲昭著 **量子力学演習** ――シッフの問題解説――　392頁	理論的基礎に重点をおきながら，実験・技術を志ざす学生にも容易に理解できる演習書たるべく，代表的教科書として定評あるシッフの同書より，章末の各問題を詳細に解説した．
井上　健監修・瀬藤憲昭・吉田俊博著 **古典力学の問題と解説** ――ゴールドスタイン(第2版)に基づいて――　434頁	近代的な量子力学・場の理論・物性論を学ぶ際の踏み台として，古典力学を新しい見地から解説された，一般力学の標準的教科書と，誉れの高いゴールドスタイン（第2版）の章末の問題を詳細に解説した最新の演習書．
大槻義彦監修・飯高敏晃他著 **演習現代の量子力学** ――J.J. サクライの問題解説――　336頁	本書は．J.J. サクライの教科書「現代の量子力学」の章末問題の解説である．この解説は1991年度，早稲田大学の物理学科，応用物理学科のはじめて量子力学を学ぶ学部3年生を対象に行った演習に基づいている．

木村利栄・菅野礼司著 改訂増補 微分形式による解析力学 272頁	「マグロヒル出版」より刊行されていた前著にその後の拘束力学系の理論の発展を取り入れた．物理学理論で強力かつ不可欠な武器となる外微分形式を用いて，解析力学を詳しく紹介した．
F.クローズ　井上　健訳・九後汰一郎補遺 訂正増補 宇宙という名の玉ねぎ ―― クォーク達と宇宙の素性　268頁	物質の根源の姿を追求してきた今世紀の素粒子物理学の，心躍る発見と認識の深化のプロセスを読者に追体験させてくれる．数式を用いずに一般向けに解説．前著に「その後の発展と歴史的経緯に対する補遺」追加．
生物物理から見た生命像 1． 蛋白質―この絶妙なる設計物 赤坂一之編　146頁	わかりやすさ・親しみやすさを重視して，これから学問を始めようとする人に，蛋白質の「自然による絶妙な設計物」としてのおもしろさを伝える．
生物物理から見た生命像 2． 生体膜―生命の基本形を形づくるもの 葛西道生・田口隆久編　180頁	20世紀後半の生体膜モデルの確立，単一分子解析から単一細胞での解析，再構成膜系での解析へと進み，「脳研究の世紀」といわれる21世紀へつながる生き生きとした研究展開を感覚的に理解できるよう工夫されている．
生物物理から見た生命像 3 ナノピコスペースのイメージング 柳田敏雄・石渡信一編　172頁	生体分子 1 個を見て操作するという斬新な技術を中心に紹介し，それらを使って分子モーターの働くしくみがどの程度までわかってきたかが解説され，分子機械のあいまいさに柔軟な生物システムの原点を探る．
生物物理から見た生命像 4 知　覚　の　セ　ン　サ　ー 津田基之編　138頁	知覚のセンサーの巧みなシグナルの獲得と情報処理のメカニズムに焦点を合わせ第一線の研究者がわかりやすく解説．脳で最も研究の進んでいる知覚のセンサーの理解は「脳科学の世紀」である21世紀に必須である．
スティーブンス　早田次郎訳 現代物理を学ぶための　理　論　物　理　学 292頁	予備知識はほとんど仮定されておらず，必要とされる数学的知識は最初の章にまとめて解説されている．式の導出は非常に丁寧で，物理を学ぼうとする人が現代物理の基礎を学ぶためには絶好の書である．
高橋光一著 宇　宙・物　質・生　命 ― 進化への物理的アプローチ ―　224頁	著者の長年にわたる教養教育課程の講義の中から生まれた．宇宙誕生から生物進化までの解明に物理学が果たした役割と，進化に科学がどのようにかかわってきたのかを物理的視点から眺める．文系教養教科書として最適．
日置善郎著 場　の　量　子　論 ―摂動計算の基礎―　176頁	相対論的な場の量子論の基本的な構成がスケッチされるとともに，主要な計算方法である共変的な摂動論の基礎が，幾つかの具体的な計算例とともに丁寧に解説される．場の量子論・摂動計算の公式集の価値がある．
花井哲也著 不均質構造と誘電率 ― 物質をこわさずに内部構造を探る ―　316頁	個々の工業生産物や生物細胞などについて，処理解析の技法，結果の実用的解釈の仕方の実際例などを初心者にも理解できるよう解説．化学・工業生産の技術分野の技術者・研究者には待望の書である．